高等学校函授教材

高等数学

第三分册

张之良编著

水利电力出版社

O13
22:3

高等学校函授教材

高等数学

第三分册

张之良编著

水利电力出版社

高等学校函授教材

高 等 数 学

第 三 分 册

张之良编著

*

水利电力出版社出版

（北京德胜门外六铺炕）

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 $13^1/_4$ 印张 295千字

1979年7月第一版 1979年7月北京第一次印刷

印数 00001—24220册 每册 1.40 元

书号 15143·3468

目　录

第十三章　不定积分 …… 1

§ 1　不定积分的基本概念及其性质 …… 1

§ 2　变量置换法（或简称换元法）…… 15

§ 3　分部积分法 …… 26

§ 4　某些三角函数的积分法，三角换元法 …… 32

(一)某些三角函数的积分法 …… 32

(二)三角换元法 …… 40

§ 5　有理函数（代数）的积分法 …… 48

(一)有理整式的积分法 …… 49

(二)有理分式的积分法 …… 49

§ 6　三角函数的有理式的积分法 …… 85

§ 7　简单无理函数的积分法 …… 92

§ 8　其他积分方法 …… 110

(一)尤拉代换法 …… 110

(二)二项型微分式的积分法 …… 118

(三)双曲函数积分法 …… 124

§ 9　关于积分问题的一些补充说明 …… 127

§ 10　查表举例 …… 129

总结 …… 132

第四次测验作业 …… 134

第十四章　定积分 …… 137

§ 1　定积分概念 …… 138

(一)引出定积分的具体问题 …… 138

(二)定积分的定义 …… 147

(三)定积分的几何解释 …… 148

(四)定积分存在定理的叙述 …… 150

§ 2　定积分的基本性质 ……………………………………157
(一)定积分的基本性质 ……………………………………158
(二)算术中值 ……………………………………172
§ 3　定积分与不定积分之间的关系 ……………………………………176
§ 4　定积分的分部积分法与变量置换法 ……………………………………186
§ 5　定积分的近似计算 ……………………………………203
§ 6　广义积分 ……………………………………216
(一)积分区间是无限大的广义积分……………………………………217
(二)无界函数的广义积分 ……………………………………220
§ 7　广义积分判敛法，Γ函数，β函数 ……………………………………228
(一)广义积分的判敛法 ……………………………………229
(二)Γ函数与β函数 ……………………………………243
总结 ……………………………………253
第十五章　定积分的应用……………………………………256
§ 1　定积分在几何上的应用 ……………………………………258
(一)面积 ……………………………………258
(二)体积 ……………………………………280
(三)曲线的弧长……………………………………314
(四)旋转面 ……………………………………325
§ 2　定积分在物理上的应用 ……………………………………334
(一)功 ……………………………………334
(二)平均值 ……………………………………336
(三)物体重心位置的确定 ……………………………………341
(四)液体压力……………………………………367
(五)转动惯量……………………………………372
(六)吸引力 ……………………………………377
总结 ……………………………………387
第五次测验作业 ……………………………………393
积分简表 ……………………………………399

第十三章　不　定　积　分

［学习指示］　不定积分法是微分法的逆运算，本章主要介绍下列几种方法：

1.换元积分法

2.分部积分法

3.有理函数积分法

4.三角函数积分法

5.三角函数有理式的积分法

6.无理函数的积分法

其中前三者为我们学习的重点。学过本章后要求读者能牢固地记住一些基本积分公式，并且会计算必须经过两次变形才能化成基本积分公式的积分。要会使用递推公式，会查积分表。

§1　不定积分的基本概念及其性质

（一）原函数与不定积分

设一质点M作直线运动，其路程是时间的某一函数

$$s=f(t)$$

其中s表示路程，t表示时间，则函数$f(t)$的导数即表示质点M在时刻t的速度

$$v=f'(t)$$

这是在微分学中所熟知的问题。但是，在力学中却常遇到与

这相反的问题；即作直线运动的质点M在任一时刻的速度$v=v(t)$为已知，而要找出质点M的运动规律。换句话说，要找出点M所经过的路程与时间的依赖关系。这问题表明：我们要找一个函数$s=f(t)$，使未知函数$f(t)$的导数$f'(t)$必须等于已知的函数$v(t)$。

上面的问题，如果把它抽象化，实质上就是下面所谈的问题：

我们在作算术的四则运算时，有了加法就有个减法作为它的逆运算，乘法也有除法作为它的逆运算。在我们已经掌握了微分运算后，很自然会问道：微分的逆运算存在不存在？如果存在，它的运算方法如何？很容易看出，这种运算是存在的（理论根据在下一章），例如：什么函数微分后为$2x$？我们很快的会回答说，这个函数是x^2。这里由$2x$得到x^2的运算就是一个微分的反运算。我们把x^2叫做$2x$的原来函数或简称**原函数**。一般的给定义如下：

定义 1　**设有函数$f(x)$及$F(x)$，如果在区间(a, b)内，任何一点都有$F'(x)=f(x)$，则$F(x)$叫做$f(x)$在区间$(a、b)$内的一个原函数。**

如x^2+1，$x^2-\frac{1}{5}$，$x^2+\frac{7}{9}$，……等，微分后均得$2x$，

可见一个函数的原函数不是唯一的，那么，它们之间有什么关系呢？如果它们之间无规律可循，这种反运算的意义也就不大，事实并不如此，它们之间有一个简单关系存在，由前面的例中已经可以看出，同一函数的原函数之间似乎只相差一个常数，要想使这个猜测变为真实，还需要进一步证明。

即是说，假若$F(x)$、$\Phi(x)$均为$f(x)$的原函数，需要证明$F(x)-\Phi(x)\equiv C$。

因　　$F'(x)=\Phi'(x)\equiv f(x)$

所以　　$F'(x)-\Phi'(x)\equiv 0$

即　　$[F(x)-\Phi(x)]'\equiv 0$

所以我们若能由

$$[F(x)-\Phi(x)]'\equiv 0$$

推得　　$F(x)-\Phi(x)\equiv C$

换句话说，我们若能证明下面的定理，则问题就解决了。

定理　**在$[a, b]$上若$\psi'=0$，则$\psi\equiv C$**

证　设$x_1<x_2$为区间$[a, b]$上任意两点，即 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，由拉格朗日定理，我们有：

$$\psi(x_2)-\psi(x_1)=(x_2-x_1)\psi'(\xi), \quad x_1<\xi<x_2$$

因在区间$[a, b]$上　$\psi'\equiv 0$，所以　$\psi'(\xi)=0$

故　　$\psi(x_2)-\psi(x_1)=0$，即$\psi(x_1)=\psi(x_2)$

但仅有此还不足以证明$\psi(x)$在区间$[a, b]$上为常数。因为很可能是它们仅在x_1，x_2两点处有 $\psi(x_1)=\psi(x_2)$ 如图13-1。

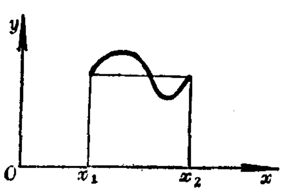


图 13-1

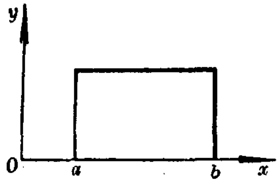


图 13-2

我们说这种情形不会发生，因为当初x_1、x_2是任意取的，它们没有任何特殊性，故知在区间$[a, b]$上，$\psi(x_1)=\psi(x_2)$到处成立。

即　　$\psi(x)\equiv C$　（图13-2）

于是我们把一个函数的任一个原函数求出，然后再加上一个随意常数，即得原函数的全体，我们把原函数的全体叫做不定积分。

定义 2　**如果函数$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则**

$$F(x)+C \qquad (1)$$

表示$f(x)$的原函数族，（1）式叫做函数$f(x)$［或微分式$f(x)dx$］的**不定积分**，记作

$$\int f(x)dx$$

根据定义，如果$F'(x)=f(x)$，就有：

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

这时，x叫做**积分变量**；函数$f(x)$叫做**被积函数**；$f(x)dx$叫做**被积表达式**。其中“$\int$”叫做**积分号**，C叫做**随意常数**（或任意常数）。

应该注意，由定义知道不定积分是代表无穷多个原函数，并且所有的原函数的全体刚好组成函数族$F(x)+C$。

思　考　问　题

1．下列各函数是否是同一函数的原函数？

$\ln x$，$\ln(-x)$，$\ln(ax)$，$\ln|x|$，$\ln|bx|$，$\frac{1}{2}\ln(Cx)^2$。

2．下列各式，何者是$\frac{1}{x}$的不定积分？

$\ln|x|$，$\ln|Cx|$，$\ln x+C$，$\frac{1}{2}\ln x^2+C$，$\ln|x|+C$，

$\frac{1}{2}\ln Cx^2$，$\frac{1}{2}\ln(Cx)^2$。

（二）不定积分的几何解释

$f(x)$的一个原函数$F(x)$的图形叫做函数$f(x)$的**积分曲线**，它的方程是$y=F(x)$。因$F'(x)=f(x)$，故积分曲线上点x处的切线的斜率恰好等于函数$f(x)$在点x处的函数值。如果把这条积分曲线沿y轴的方向平行移动一段长度C时，我们就得到另一条积分曲线。凡是积分曲线都可以由此法获得，所以不定积分$y=\int f(x)dx+C=F(x)+C$的图形，就是这样获得的全部积分曲线族，因不论常数C等于多少，都有$[F(x)+C]'=f(x)$，这表明：如果在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，这些切线是彼此平行的（图13-3）。

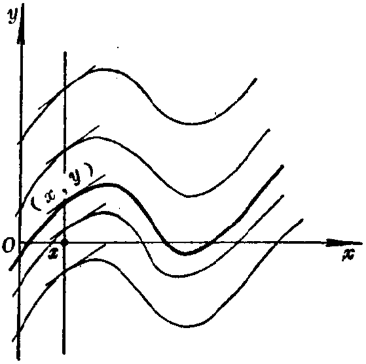


图 13-3

在求原函数的具体问题中，往往要从全部原函数中确定一个具有已知性质的原函数。这时应该利用这原函数所特有的性质来确定随意常数C。换句话说，即是需要附加条件才能由原函数的全体中确定出我们所要的那个原函数。

例 1 求通过点（2，5）而它的切线的斜率为$2x$的曲线。

解 因为$\frac{dy}{dx}=2x$，显然全部积分曲线应为：$y=x^2+C$

（图 13-4）利用所求曲线通过（2，5）这一条件，代入上式，求得$C=1$，故所求之曲线为$y=x^2+1$（图 13-4 中的粗线）。

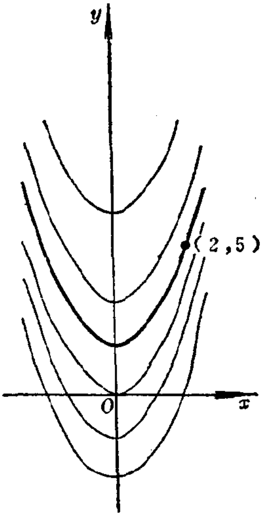


图 13-4

例 2 已知点M在直线上运动的速度v和时间t的关系为：$v=at+v_0$，其中a和v_0都是常量，求距离s和时间t的关系，如果$t=0$，$s=0$是已知的。

解 因为 $v=\dfrac{ds}{dt}$

$$=at+v_0,$$

所以 $$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0,$$

不难验证，函数s对t求导数即得$at+v_0$。把s_0看作任意常数，则上式表示一族函数。我们所求的函数必包含在这函数族中，以$t=0$及$s=0$代入上式，求得s_0等于零。因此所求的点M的运动规律为：

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

（三）不定积分的性质

根据不定积分的定义直接推出不定积分的性质：

（1）$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$或$d\int f(x)dx=f(x)dx$；

及$\int f'(x)dx=f(x)+C$或$\int df(x)=f(x)+C$。

这就是说：**若先积分后微分，则两者的作用互相抵消；若先微分后积分，则抵消后要增加一个常数项。**

（2）**有限个函数和的积分等于各个函数的积分和。**

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)]dx$$

$$=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots\cdots+\int f_n(x)dx。$$

在上式中没有另加任意常数，因为我们了解它包含在不定积分中。要证明这等式的正确性，只要证明右边的导数等于左边的被积函数即可。事实上，因为函数和的导数等于各函数的导数的和，所以上式右边的导数是：

$$\left(\int f_1(x)dx\right)'+\left(\int f_2(x)dx\right)'+\cdots\cdots$$

$$+\left(\int f_n(x)dx\right)'$$

由性质（1），就得$f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots+f_n(x)$。

［性质（2）中所说的和是指代数和，也就是说包括减也在内］，以同样推理，我们有下面性质：

（3）**被积函数中不为零的常数因子可以移到积分号外，即**$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$，　（$k$是常数，$k\neq 0$）

（四）基本积分表

我们求原函数的最初依据是由微分运算得来的。下面的表经常要用到，我们称它为基本积分表：

（1）$\int 0dx=C$；

（2）$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$；　$n\neq -1$

（3）$\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$；

(4) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

(6) $\int \sec^2 x dx = \mathrm{tg} x + C$;

(7) $\int \csc^2 x dx = -\mathrm{ctg} x + C$;

(8) $\int \sec x \,\mathrm{tg} x dx = \sec x + C$;

(9) $\int \csc x \,\mathrm{ctg} x dx = -\csc x + C$;

(10) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$;

(10′) $\int e^x dx = e^x + C$;

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C_1$

$$= -\arccos \frac{x}{a} + C_2;$$

(12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C_1$

$$= -\frac{1}{a} \mathrm{arcctg} \frac{x}{a} + C_2;$$

(13) $\int \sinh x = \cosh x + C$;

(14) $\int \cosh x = \sinh x + C$。

这个表是根据不定积分的定义得来的，如果$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，则$F'(x) = f(x)$，而$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$，根据不定积分的定义得：

$$\int f(x)dx=\int dF(x)=F(x)+C$$

例如（3）

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C,\qquad 当x>0$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C,\qquad 当x<0$$

因为第一个式子的右方求导数

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

而对第二个式子的右方求导数也得：

$$[\ln(-x)]'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

又如（11）$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C_1$

因 $$\left(\arcsin\frac{x}{a}+C_1\right)'=\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

其余类似，不一一证明。

关于这个表要求记得很熟，并且要记得准确。有的读者往往把积分表与微分表弄混，例如错记成：

$$\int \text{tg}x dx=\sec^2 x+C$$

$$\int \ln x dx=\frac{1}{x}+C$$

等等，随之自然就作错了题，希读者注意。

利用不定积分的性质和基本积分表，我们可以求一些最简单的函数的不定积分。

例 1 $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

例 2 $\int\dfrac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=-\dfrac{1}{2x^2}+C$

例 3 $\int(2x^3-5x^2-3x+4)dx=\int 2x^3dx-\int 5x^2dx$

$-\int 3xdx+\int 4dx=\dfrac{x^4}{2}-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x+C$

例 4 $\int\left(\dfrac{2a}{\sqrt{x}}-\dfrac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$=2a\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}-b\int\dfrac{dx}{x^2}+3c\int x^{\frac{2}{3}}dx$

$=2a\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-b\dfrac{x^{-1}}{-1}+3c\dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C$

$=4a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{9c}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

例 5 $\int(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3dx$

$=\int(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx$

$=a^2x-\dfrac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\dfrac{x^3}{3}+C$

$=a^2x-\dfrac{9}{5}a\sqrt[3]{a}\,x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{9}{7}\sqrt[3]{a^2}\,x^2\sqrt[3]{x}$

$-\dfrac{1}{3}x^3+C$

习 题 13-1

求下列各式的积分：

（1）$\int \sqrt[3]{x}\,dx$，　　答：$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$；

（2）$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$，　　答：$\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$；

（3）$\int 10^x dx$，　　答：$\frac{10^x}{\ln 10}+C$；

（4）$\int a^x e^x dx$，　　答：$\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$；

（5）$\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$，

答：$\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$；

（6）$\int \frac{x^4-10x^2+5}{x^2}dx$，答：$\frac{x^3}{3}-10x-\frac{5}{x}+C$；

（7）$\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$，　　答：$x-2\ln x-\frac{1}{x}+C$；

（8）$\int(1+\sin x+\cos x)dx$，答：$x-\cos x+\sin x+C$；

（9）$\int(2^x+3^x)^2 dx$，

答：$\frac{2^{2x}}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{3^{2x}}{\ln 9}+C$；

（10）$\int(1-t)dt$，　　答：$t-\frac{t^2}{2}+C$；

（11）$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$，答：$\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$。

简单微分表（甲）

（12）试在1）～45）各题中等号的右端括号内填入正

确的答案：

例如 $d(a+\cos 2x)=-2\sin 2x dx$

$de^{4x-1}=4e^{4x-1}dx$等等。

1) $dax=($　　$)$. 2) $d(4x-5)=($　　$)$.

3) $dx^2=($　　$)$. 4) $d(ax^2)=($　　$)$.

5) $d(ax^2+b)=($　　$)$.

6) $d(x^3)=($　　$)$.

7) $d(ax^3+c)=($　　$)$.

8) $de^x=($　　$)$. 9) $d(e^x-3)=($　　$)$.

10) $da^x=($　　$)$. 11) $de^{x+5}=($　　$)$.

12) $d(a^{2x}+9)=($　　$)$.

13) $de^{-x}=($　　$)$. 14) $d(e^{-3x^2})=($　　$)$.

15) $de^{2-5x}=($　　$)$.

16) $d\sin x=($　　$)$. 17) $d\cos(x^2)=($　　$)$.

18) $d\sin(3-4x)=($　　$)$.

19) $d\cos(6x+1)=($　　$)$.

20) $d(a-\sin 5x)=($　　$)$.

21) $d\mathrm{tg} x=($　　$)$. 22) $d\mathrm{ctg} x=($　　$)$.

23) $d\mathrm{tg} 3x=($　　$)$. 24) $d\mathrm{ctg}(ax-1)=($　　$)$.

25) $d(a+3\mathrm{ctg} 2x)=($　　$)$.

26) $d\ln x=($　　$)$. 27) $d\ln(ax)=($　　$)$.

28) $d\ln(ax+b)=($　　$)$.

29) $d(a+\ln 3x)=($　　$)$.

30) $d\sqrt{x}=($　　$)$. 31) $d(a-\sqrt{x})=($　　$)$.

32) $d\frac{1}{x}=($　　$)$. 33) $d(1-x)=($　　$)$.

34) $d(x^2-1)=($　　$)$.

35) $d(x^2-x+a)=($　　$)$.

36) $d(1-x^3)=($　　$)$.

37) $d(1-5x^2)=($　　$)$.

38) $d[(x^2+1)-4]=($　　$)$.

39) $d[(x+1)^2-2]=($　　$)$.

40) $d[a+(b-x)^2]=($　　$)$.

41) $d[a-(b+x)^2]=($　　$)$.

42) $d\arcsin x=($　　$)$.

43) $d\arcsin(5x-1)=($　　$)$.

44) $d\,\mathrm{arctg}(3x+1)=($　　$)$.

45) $d\,\mathrm{arcctg}5x=($　　$)$.

简单微分表（乙）

（13）试在1）～40）各题中等号的右端空白处填入适当的系数使等式成立。

例如　$dx=\frac{1}{4}d(4x+7)$，　$xdx=-\frac{1}{2}d(4-x^2)$等等。

1) $dx=($　　$)d(5x)$;

2) $dx=($　　$)d(7x-3)$;

3) $dx=($　　$)d(1+x)$;

4) $dx=($　　$)d(a-bx)$;

5) $xdx=($　　$)d(5x^2)$;

6) $xdx=($　　$)d(x^2+1)$;

7) $xdx=($　　$)d(1-x^2)$;

8) $xdx=($　　$)d(a-bx^2)$;

9) $x^2dx=($　　$)d(x^3)$;

10) $x^2dx=($　　$)d(5x^3)$;

11) $x^3dx=($ $\quad\quad$ $)d(3x^4-2)$;

12) $x^2dx=($ $\quad\quad$ $)d(2-3x^3)$;

13) $e^xdx=($ $\quad\quad$ $)de^x$;

14) $e^{2x}dx=($ $\quad\quad$ $)de^{2x}$;

15) $e^{3x}dx=($ $\quad\quad$ $)de^{3x}$;

16) $xe^{x^2}dx=($ $\quad\quad$ $)de^{x^2}$;

17) $\frac{dx}{x}=($ $\quad\quad$ $)d\ln x$;

18) $\frac{dx}{x}=($ $\quad\quad$ $)d(3-5\ln x)$;

19) $e^{2x-1}dx=($ $\quad\quad$ $)de^{2x-1}$;

20) $a^xdx=($ $\quad\quad$ $)da^x$;

21) $a^{3x}dx=($ $\quad\quad$ $)d(a^{3x}-1)$;

22) $\sin x dx=($ $\quad\quad$ $)d\cos x$;

23) $\sin 3x dx=($ $\quad\quad$ $)d\cos 3x$;

24) $\sin 3x dx=($ $\quad\quad$ $)d(1-\cos 3x)$;

25) $\cos(3x-2)dx=($ $\quad\quad$ $)d\sin(3x-2)$;

26) $\frac{dx}{\cos^2 x}=($ $\quad\quad$ $)d\mathrm{tg}x$;

27) $\frac{dx}{\cos 5x}=($ $\quad\quad$ $)d\mathrm{tg}5x$;

28) $\frac{xdx}{x^2-1}=($ $\quad\quad$ $)d[\ln(x^2-1)]$;

29) $\frac{\sin x dx}{\cos x}=($ $\quad\quad$ $)d\ln\cos x$;

30) $\frac{dx}{5-2x}=($ $\quad\quad$ $)d\ln(5-2x)$;

31) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=($ $\quad\quad$ $)d\arcsin x$;

32) $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=(\qquad)d\arcsin 3x$;

33) $\frac{dx}{1+9x^2}=(\qquad)d\text{arctg}\,3x$;

34) $\frac{e^x dx}{1+e^x}=(\qquad)d\ln(1+e^x)$;

35) $e^{\sin x}\cos x dx=(\qquad)de^{\sin x}$;

36) $\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}=(\qquad)d\text{arctg}\cos x$;

37) $(x+1)dx=(\qquad)d(x^2+2x-5)$;

38) $(x-2)dx=(\qquad)d[(x-2)^2+a^2]$;

39) $(3-x)dx=(\qquad)d[(3-x)^2-a^2]$;

40) $(1-e^x)e^x dx=(\qquad)d[a^2+(1-e^x)^2]$。

到目前为止，我们所解决的不定积分问题为数不是很多，例如很简单的正弦函数 $\sin 5x$ 的积分，在基本积分表中就查不到，因此，进一步来研究积分技巧，是完全必要的。

§2 变量置换法（或简称换元法）

（一）$u=\varphi(x)$

定理 **设（1）$f(u)$的原函数为$F(u)$**

（2）$u=\varphi(x)$可微

则 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$$

证 如果把此式右端$F[\varphi(x)]+C$对x求导数，得出左端的被积函数$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$则定理得证。

由假设（1）$\int f(u)du=F(u)+C$，即$F'(u)=f(u)$再

由假设（2）$F(u)=F[\varphi(x)]$

则 $dF(u)=F'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

故 $F(u)=F[\varphi(x)]$为$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

的原函数；于是定理得证。

有了这个定理，基本积分表的应用范围大为扩充，若对于$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$不易积分，可设 $u=\varphi(x)$，$\varphi'(x)dx=du$，则$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 化为$\int f(u)du$，而$\int f(u)du$我们可以在基本积分表中找到，于是问题解决。

例 1 前边我们已经提到

$$\int \sin 5x\,dx$$

在基本积分表中直接查不到，如果我们作一变换就可以查到了。

设 $u=5x$ 则 $dx=\frac{1}{5}du$代入上式得

$$\int \sin 5x dx=\int (\sin u)\frac{1}{5}\,du=\frac{1}{5}\int \sin u du$$

由基本积分表公式（5）

$$原式=\frac{1}{5}[-\cos u]+C=-\frac{1}{5}\cos u+C$$

最后再把u换为$5x$，于是得：

$$\int \sin 5x dx=-\frac{1}{5}\cos 5x+C$$

读者注意，作此题时实质是先把原式

$$\int \sin 5x dx$$

写为： $\frac{1}{5}\int \sin 5x d5x$，然后以$u$代$5x$得：

$$\frac{1}{5}\int \sin u du = -\frac{1}{5}\cos u + C$$

如果我们作不到这一点，我们就不能作这样的代换。

例如 $\int e^{x^2}dx$，我们就不能令$u = x^2$

因 $du = 2xdx$，而$\int e^{x^2}dx$不可能化为：

$$\int e^{x^2}(2x)dx$$ 的缘故。

例 2 求$\int xe^{x^2}dx$的不定积分

设 $u = x^2$，$du = 2xdx$，则 $xdx = \frac{1}{2}du$

所以 $\int xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}(xdx)$

$$= \frac{1}{2}\int e^u du$$

由基本积分表公式（10）知：

$$原式 = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

读者应当看到此题所以能够作这样的代换是因为

$$\int xe^{x^2}dx可以化为：\int e^{x^2}\left(\frac{1}{2}dx^2\right)$$

的缘故。

例 3 求$\int \mathrm{tg}xdx$ 的不定积分

解 原式$= \int \frac{\sin xdx}{\cos x}$，设$u = \cos x$ $du = -\sin xdx$

$$原式 = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin xdx) = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$$

由基本积分表公式（3）

$$原式=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C$$

$$=-\ln|\cos x|+C$$

例 4 求$\int(ax+b)^m dx$，$m\neq-1$

解 设$u=ax+b$，则$du=adx$，

所以 $$dx=\frac{1}{a}du$$

于是：$$\int(ax+b)^m dx=\int u^m\cdot\frac{1}{a}du=\frac{1}{a}\int u^m du$$

因$m\neq-1$，由基本积分表中公式（2）得：

$$\int u^m du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C$$

所以 $$\int(ax+b)^m dx=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+C$$

例 5 求$\int\frac{dx}{a^2+x^2}$的不定积分

解 $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

设 $u=\frac{x}{a}$，则$du=\frac{dx}{a}$，$dx=adu$

于是：$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{a}{a^2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{1+u^2}$$

由基本积分表公式（12） $$\int\frac{du}{1+u^2}=\operatorname{arctg}u+C$$

所以 $$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

例 6 求$\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}xdx$的不定积分

解 设$u=a^2+b^2x^2$，则$du=2b^2xdx$，

$$xdx=\frac{du}{2b^2}$$

于是： $\int(a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}}xdx=\frac{1}{2b^2}\int u^{\frac{1}{2}}du$

由基本积分表公式（2）

$$原式=\frac{1}{2b^2}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{\sqrt{(a^2+b^2x^2)^3}}{3b^2}+C$$

当读者作练习比较熟练以后，对于较简单的题目，就可以不必再把 u 写出来，象下面例题所示一样，直接计算即可。

例 7 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的不定积分

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$

$$=\frac{a}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

这就是基本积分表中公式（11）

例 8 求 $\int \mathrm{ctg}x dx$ 的不定积分

解 $\int \mathrm{ctg}x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}$

$$=\ln|\sin x|+C$$

例 9 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$ 的不定积分

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-x^2}}$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{5}}+C$$

但若遇到较复杂的题目仍得设$u=\varphi(x)$为宜。

例 10 求$\int\frac{dx}{\sqrt{6x--4x^2}}$的不定积分

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}}$

设 $u=x-\frac{3}{4}$，$du=dx$，于是：

原式$=\int\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4u^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-u^2}}$，视$\frac{3}{4}=a$

由基本积分表公式（11）有：

原式$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{\frac{3}{4}}+C$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{4u}{3}+C$$

再把 $u=x-\frac{3}{4}$ 代回，所以

原式$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{4x-3}{3}+C$

例 11 求 $\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$ 的不定积分

解 $\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \int \frac{xdx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

设 $u = x + \frac{1}{2}$, $du = dx$, $x = u - \frac{1}{2}$

$$所以，原式 = \int \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{udu}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2+\frac{3}{4}\right)}{u^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

从上面所举的例子中，可以使我们认识到公式：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du \cdots \quad (1)$$

在求不定积分方面所起的作用。象复合函数的求导公式在微分学中一样，公式（1）在积分学中也是用得最多的。但利用（1）来求积分，往往比利用复合函数的求导公式来求函数的导数要困难得多。因为其中需要更多的特殊灵活技巧，不仅选择可微函数 $u=\varphi(x)$ 值得考虑，有时还需先把被积函

数变成合宜的形式，方可进行换元，而所有这一切，又没有一般的途径可循；因此要想掌握好换元法，除了熟悉一些典型的例子外，还要通过较多的练习才行。

（二）$x=\psi(u)$

有时对于$\int f(x)\,dx$，我们直接不会积分，即在被积表达式$f(x)\,dx$中不易找或找不到适当的$u=\varphi(x)$代入使它化为容易积分的形式。因此，我们往往用相反的方法来作换元。即是设

$$x=\psi(u)$$

则
$$\int f(x)\,dx=\int f[\psi(u)]\,d\psi(u)=\int f[\psi(u)]\psi'(u)\,du$$
$$=\int \Phi(u)\,du \qquad (2)$$

如果$\int \Phi(u)\,du$能积出来，则问题解决了。

但是（2）的成立并且可积分，是需要具备一定的条件的。

1．要求$f(x)$连续；

2．要求$\psi(u)$连续单调；

3．$\psi'(u)$连续且$\psi'(u)\neq 0$。

因为如果第1、2、3条满足，则

$\Phi(u)=f[\psi(u)]\psi'(u)$为连续，于是就保证不定积分

$$\int f[\psi(u)]\psi'(u)\,du=\int \Phi(u)\,du \text{存在。}$$

第3条的假设是因为$\int \Phi(u)\,du$积出后为u的函数$\psi(u)$，我们必须用$x=\psi(u)$的反函数$u=\varphi(x)$代回去，使得$\int \Phi(u)\,du$

积出来的函数仍为x的函数。为了保证$u=\varphi(x)$的存在，单值可微，故必须要求$x=\psi(u)$连续单调和$\psi'(u)\neq 0$。

事实上，在上述的条件下，我们很容易证明

$$\int f(x)dx=\int f[\psi(u)]\psi'(u)du=\int \Phi(u)du$$
$$=\psi(u)+C=\psi[\varphi(x)]+C$$
$$=F(x)+C \qquad (2')$$

其中 $\psi'(u)=f[\psi(v)]\psi'(u)$，$F(x)=\psi[\psi(x)]$。

要证明（2′）式的成立，只要能证明

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

就行了。应用复合函数的求导数和反函数的求导数法则，立即可以得到：

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{d\psi}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\Phi(u)\cdot\frac{1}{\psi'(u)}$$
$$=f[\psi(u)]\psi'(u)\frac{1}{\psi'(u)}=f[\psi(u)]$$
$$=f(x)$$

下面我们用具体例子来说明公式（2）的应用：

例 1 求$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$的不定积分

解 设$x=u^2$，则$dx=2udu$，$u=\sqrt{x}$，

$$(0<x<+\infty,\ 0<u<+\infty)$$

于是$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin u}{u}\cdot 2udu=2\int\sin udu$

$$=-2\cos u+C$$
$$=-2\cos\sqrt{x}+C$$

例 2 求$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$的不定积分

解 设$x=a\sin\theta$，则$dx=a\cos\theta d\theta$

$$\theta=\arcsin\frac{x}{a},\ \left(-a<x<a,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

于是$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta}=\int d\theta=\theta+C$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

关于用这一方法换元目前先谈到这里，以后将陆续举例介绍。

习 题 13-2

（1）运用换元法〔要写出换元关系式$u=\psi(x)$〕求出下列各不定积分。

1） $\int(3x+2)^3dx$，　　答：$\frac{(3x+2)^4}{12}+C$．

2） $\int x\sqrt{2x^2+7}\,dx$，　　答：$\frac{1}{6}(2x^2+7)^{\frac{3}{2}}+C$．

3） $\int\frac{3xdx}{(x^2+1)^2}$，　　答：$-\frac{3}{2(x^2+1)}+C$．

4） $\int\sin\frac{x}{2}dx$，　　答：$-2\cos\frac{x}{2}+C$．

5） $\int xe^{x^2}dx$，　　答：$\frac{1}{2}e^{x^2}+C$．

6） $\int\frac{\sec^2xdx}{a+b\,\mathrm{tg}x}$，　　答：$\frac{1}{b}\ln(a+b\,\mathrm{tg}x)+C$．

（2）试在上题的各小题的被积函数中分别抽出适当的微分式子，并把它化成相当的形式〔这里换元关系式$u=$

$\varphi(x)$，不必写出来〕，随即根据基本积分公式写出各积分（要认识这一演算方法的优点）。

例如，$\int x\sqrt{2x^2+7}\,dx=\int(2x^2+7)^{\frac{1}{2}}(xdx)$

$$=\frac{1}{4}\int(2x^2+7)^{\frac{1}{2}}d(2x^2+7)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(2x^2+7)^{\frac{3}{2}}}{6}+C$$

（3）求下列各式的积分

1） $\int\frac{dx}{25+4x}$，　　答：$\frac{1}{10}\text{arc tg}\frac{2x}{5}+C$。

2） $\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$，　　答：$\frac{1}{3}\text{arc sin}\frac{3x}{4}+C$。

3） $\int\frac{dx}{16+9x^2}$，　　答：$\frac{1}{12}\text{arc tg}\frac{3}{4}x+C$.

4） $\int\sqrt{1-2x}\,dx$，　　答：$-\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}+C$。

5） $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$，　　答：$-\frac{2}{3}(2-3x)^{\frac{1}{2}}+C$。

6） $\int\left(1+\frac{x}{2}\right)^4dx$，　　答：$\frac{2}{5}\left(1+\frac{x}{2}\right)^5+C$。

7） $\int\cos3x\,dx$，　　答：$\frac{1}{3}\sin3x+C$。

8） $\int\frac{\ln x}{x}dx$，　　答：$\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$。

9） $\int\frac{dx}{x\ln x}$，　　答：$\ln\ln x+C$。

10） $\int\frac{\cos x}{1+\sin^2x}dx$，　　答：$\text{arctg}\sin x+C$。

（4*）求下列各式的不定积分

1） $\int \frac{8dx}{9x^2-12x+20}$，　答：$\frac{2}{3}\text{arc tg}\frac{3x-2}{4}+C$。

2） $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$，　答：$\frac{1}{2}\text{arc sin}\frac{8x-9}{9}+C$。

3） $\int \frac{3x-1}{9x^2+6x+26}dx$，

答：$\frac{1}{6}\ln(9x^2+6x+26)-\frac{2}{15}\text{arc tg}\frac{3x+1}{5}+C$。

4） $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x-x^2}}$，

答：$-\sqrt{4x-x^2}+2\text{arc sin}\frac{x-2}{2}+C$。

§3　分部积分法

设函数$u=u(x)$及$v=v(x)$具有连续导数，在微分学中关于这两个函数积的导数有公式：

$$[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x) \qquad (1)$$

现在我们就从公式（1）导出下面的积分公式，先把公式（1）写为：

$$u(x)v'(x)=[u(x)v(x)]'-v(x)u'(x) \qquad (2)$$

积分等式（2）的两边，并利用不定积分性质(1)和(2)得：

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx \qquad (3)$$

公式（3）称为分部积分公式。如果求$\int u(x)v'(x)dx$有困难，而求$\int v(x)u'(x)dx$比较容易时，分部积分公式，就可

以发挥它的作用了。因$dv=v'(x)dx$，$du=u'(x)dx$，为简便起见，我们可以把公式（3）写成下列形式：

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (4)$$

在实际上，如何正确运用公式（4），最好还是从下面的具体例子中来体会。

例 1 求$\int x\sin x dx$的不定积分

设 $u=x$，$\sin x dx=dv$，

$du=dx$，$v=-\cos x$.

原式$=-x\cos x+\int\cos x dx=-x\cos x+\sin x+C$.

在此题中如果选择u，dv不适当时，例如

设 $u=\sin x$，$dv=xdx$，

$du=\cos x$，$v=\frac{1}{2}x^2$.

则原式$=\frac{1}{2}x^2\sin x-\frac{1}{2}\int x^2\cos x dx$，其中$\int vdu$比原式$\int udv$还复杂，于是问题不能解决。所以我们在选择$u$，$dv$时要注意一个原则：即$\int vdu$不能比$\int udv$还复杂，更具体的对这个例子来说，不应使$x$的次数增高。

例 2 求$\int \arccos x dx$的不定积分

设

$u=\arccos x$，$dv=dx$，

$du=\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$，$v=x$.

$$原式 = x\arccos x + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

例 3 求 $\int x^2 e^x dx$ 的不定积分

设 $u = x^2$, $dv = e^x dx$,

$du = 2x dx$, $v = e^x$.

所以，原式 $= x^2 e^x - 2\int x e^x dx$.

问题到这里虽然还未全部解决，可是我们看出，剩下的部分，肯定是比原来的积分简单，并且很容易看出，再作一次分部积分，问题即可全部解决。

再设 $u = x$, $dv = e^x dx$,

$du = dx$, $v = e^x$,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C,$$

所以 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

由此例我们看到分部积分法可以重复使用。

例 4 求 $\int e^{ax}\sin bx dx$ 的不定积分

设 $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx dx$,

$du = a e^{ax} dx$, $v = -\frac{1}{b}\cos bx$.

$$\int e^{ax}\sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

做到此处，关于$\int e^{ax}\cos bx dx$的计算困难情况，不减于$\int e^{ax}\sin bx dx$；但我们可以推侧一下，方才用一次分部积分法后，使积分号内的$\sin bx$化为$\cos bx$，如果再作一次，是否又有变回到$\sin bx$的可能，如果是的话，这对我们积分是否会有帮助，因此不妨试试看。

设 $u=e^{ax}$, $\qquad dv=\cos bx dx$,

$$du=ae^{ax}dx, \qquad v=\frac{1}{b}\sin bx.$$

所以$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx$

代入第一次的结果中，我们有：

$$\int e^{ax}\sin bx dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx$$

$$+\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx\right)$$

经移项整理得：

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$=e^{ax}\left(\frac{a}{b^2}\sin bx-\frac{1}{b}\cos bx\right)$$

即 $$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

简 短 小 结

总结以上：

1 ）对于被积函数为超越函数及其乘积如：

$\ln x$，$x\ln x$，$x\arcsin x$，$e^x\cos x$，…等均可用分部积分

法求得其不定积分，对于$x^m\sin x$，$x^m\cos x$，$x^m e^x$，…等均可用多次分部积分求得（其中m为正整数）。于是对于：$P(x)\sin x$，$P(x)\cos x$，$P(x)e^x$，…等均可用多次分部积分法求得其不定积分〔其中$P(x)$为多项式〕。

2）关于u、dv的选择问题是这样的，因右端出现$\int vdu$故应选u和dv使vdu比udv简单。一般地是，x^n，$\arcsin f(x)$，$\mathrm{arctg} f(x)$，$\ln f(x)$常取作u；e^x，$\sin ax$，$\cos ax$取作u或dv均可。

习　题　13-3

（1）用分部积分法求出下列各积分

1）$\int \ln x dx$，　　答：$x(\ln x-1)+C$.

2）$\int x\sin x dx$，　　答：$\sin x - x\cos x + C$.

3）$\int \arcsin x dx$，　答：$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

4）$\int \mathrm{arctg} x dx$，

答：$x\,\mathrm{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

5）$\int x\,\mathrm{arctg} x dx$，

答：$\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg} x-\frac{x}{2}+C$.

6）$\int x\cdot 3^x dx$，　　答：$\frac{3^x}{(\ln 3)^2}(x\ln 3-1)+C$.

（2*）用分部积分法求出下列各积分

1）$\int e^{ax}\cos bx dx$，

答：$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$。

2）$\int (\ln x)^2 dx$，　答：$x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$。

3）$\int x\sec^2 x dx$，　答：$x\mathrm{tg}x+\ln|\cos x|+C$。

4）$\int x^n \ln x dx$，

答：$x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]+C$。

5）$\int \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})dx$，

答：$x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\sqrt{x^2+a^2}+C$。

6）$\int \sin(\ln x)dx$，

答：$\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$。

7）$\int \cos(\ln x)dx$，

答：$\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$。

8）$\int x^2(\ln x)^2 dx$，

答：$\frac{x^3}{27}[9(\ln x)^2-6\ln x+2]+C$。

§4 某些三角函数的积分法，三角换元法

在这一节中，我们将利用换元法和分部积分法来解决某些三角函数的积分，下面通过具体例题来说明。

在举例以前先复习一下三角恒等式及三角函数的微分式是有益的。

① $\sin^2x+\cos^2x=1,\quad 1+\mathrm{tg}^2x=\sec^2x,$

$$1+\mathrm{ctg}^2x=\csc^2x;$$

② $\cos^2x=\dfrac{1+\cos2x}{2},\quad \sin^2x=\dfrac{1-\cos2x}{2},$

$$\sin2x=2\sin x\cos x;$$

③ $2\sin mx\cos nx=\sin(m-n)x+\sin(m+n)x,$

$2\sin mx\sin nx=\cos(m-n)x-\cos(m+n)x,$

$2\cos mx\cos nx=\cos(m-n)x+\cos(m+n)x;$

④ $d\sin x=\cos xdx,\qquad d\cos x=-\sin xdx,$

$d\mathrm{tg}x=\sec^2xdx,\qquad d\mathrm{tg}x=-\csc^2xdx,$

$d\sec x=\sec x\mathrm{tg}xdx,\quad d\csc x=-\csc x\mathrm{tg}xdx,$

$d\arcsin x=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ d\arccos x=\dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$

$d\mathrm{arctg}x=\dfrac{dx}{1+x^2},\qquad d\mathrm{arctg}x=\dfrac{-dx}{1+x^2}.$

（一）某些三角函数的积分法

例 1 求 $\int\sin^2xdx$ 的不定积分

解 $\int\sin^2xdx=\int\dfrac{1-\cos2x}{2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x)$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C$$

例 2 求$\int \sin^3 x dx$的不定积分

解 $\int \sin^3 x dx=\int \sin^2 x\cdot \sin x dx$

$$=-\int (1-\cos^2 x)d\cos x$$

$$=-\int d\cos x+\int \cos^2 x d\cos x$$

$$=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

例 3 求$\int \mathrm{tg}^3 x dx$的不定积分

解 $\int \mathrm{tg}^3 x dx=\int \mathrm{tg}x\cdot(\sec^2 x-1)dx$

$$=\int \mathrm{tg}x\cdot\sec^2 x dx-\int \mathrm{tg}x dx$$

$$=\int \mathrm{tg}x d\mathrm{tg}x+\int \frac{d\cos x}{\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$$

例 4 求$\int \mathrm{tg}^4 x dx$的不定积分

解 $\int \mathrm{tg}^4 x dx = \int \mathrm{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)dx$

$= \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \sec^2 x dx - \int \mathrm{tg}^2 x dx$

$= \int \mathrm{tg}^2 x d\mathrm{tg} x - \int (\sec^2 x - 1)dx$

$= \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg} x + x + C$

例 5 求 $\int \csc x dx$ 的不定积分

解 $\int \csc x dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{2}}$.

$= \int \frac{d\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\, d\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{d\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$

$= \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$

又因 $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\ \sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

$= \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \csc x - \mathrm{ctg} x$

所以 $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \mathrm{ctg} x| + C$

例 6 求 $\int \sec x dx$ 的不定积分

解 $\int \sec x dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=\ln\left|\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C\text{（由例5）}$$

$$=\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C$$

例 7 求 $\int\sec^6 xdx$ 的不定积分

解 $\int\sec^6 xdx=\int(\operatorname{tg}^2 x+1)^2\cdot\sec^2 dx$

$$=\int(\operatorname{tg}^2 x+1)^2 d\operatorname{tg}x$$

$$=\int(\operatorname{tg}^4 x+2\operatorname{tg}^2 x+1)d\operatorname{tg}x$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{2y^3 x}{3}+\operatorname{tg}x+C$$

例 8 求 $\int\operatorname{tg}^5 x\sec^3 xdx$ 的不定积分

解 $\int\operatorname{tg}^5 x\sec^3 xdx=\int\operatorname{tg}^4 x\sec^2 x(\sec x\operatorname{tg}xdx)$

$$=\int(\sec^2 x-1)^2\sec^2 xd\sec x$$

$$=\int(\sec^6 x-2\sec^4 x+\sec^2 x)d\sec x$$

$$=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C$$

例 9 求 $\int\sin^2 x\cos^5 xdx$ 的不定积分

解 $\int\sin^2 x\cos^5 xdx=\int\sin^2 x\cos^4 x\cdot\cos xdx$

$$=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x$$

$$=\int(\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x)d\sin x$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C$$

例 10 求$\int \cos 3x\cos 2xdx$的不定积分

解 原式$=\frac{1}{2}\int[\cos(3-2)x+\cos(3+2)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos xdx+\frac{1}{10}\int\cos 5xd(5x)$$

$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$$

简 短 小 结

总结以上所举之例题，其一般形式不外以下几种：

1) $\int \sin^m x\cos^n xdx$;

2) $\int \mathrm{tg}^m x\sec^n xdx$;

3) $\int \mathrm{ctg}^m x\csc^n xdx$;

4) $\int \sin mx\cos nxdx$;

5) $\int \sin mx\sin nxdx$;

6) $\int \cos mx\cos nxdx$;

在 1 ）中若m、n为正整数

①当$n=0$，则$\int \sin^m xdx$可用分部积分法

设 $u=\sin^{m-1}x$, $dv=\sin xdx$;

$du=(m-1)\sin^{m-2}x\cos xdx$, $v=-\cos x$

所以 $\int\sin^m xdx=-\sin^{m-1}x\cos x+(m-1)\int\sin^{m-2}x\cos^2 xdx$

但是 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$，所以

$$\int\sin^{m-2}x\cos^2 xdx=\int\sin^{m-2}xdx-\int\sin^m xdx$$

将此式代入上式，移项合并得：

$$m\int\sin^m xdx=-\sin^{m-1}x\cos x+(m-1)\int\sin^{m-2}xdx$$

故有：

$$\int\sin^n xdx=-\frac{\sin^{m-1}x\cos x}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}xdx \tag{1}$$

②当 $m=0$ 时，同理有：

$$\int\cos n\,xdx=\frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx \tag{2}$$

这两个公式都叫做**递推公式**，每用一次可降低被积函数两次幂。

例如 $$\int\sin^6 xdx=-\frac{\sin x^5\cos x}{6}+\frac{5}{6}\int\sin^4 xdx$$

$$\int\sin^4 xdx=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}\int\sin^2 xdx$$

$$\int\cos^4 xdx=\frac{\cos^3 x\sin x}{4}+\frac{3}{4}\int\cos^2 xdx$$ 等是。

③当 m，n 全为偶次，则可用 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$，将积分式内全化为 $\cos x$ 的幂（或用 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 化为 $\sin x$ 的幂），然后用递推公式（2）或（1）。

④当 m，n 中全为奇数，或有一为奇数。

比如说 n 为奇数，则 $n-1$ 为偶数，可设 $n-1=2p$，则有

$$\int \sin^m x \cos^{n-1} x d\sin x$$

$$=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^p d\sin x$$

$$=\int u^m(1-u^2)^p du,$$ 其中$u=\sin x$，于是可积。

在 2 ）或 3 ）中

①m、n 全为奇数（或m为奇数），可用

$$\mathrm{tg}x\sec x dx=d\sec x$$

此时被积表达式中$\mathrm{tg}^{m-1}x\sec^{n-1}x$的幂$m-1$为偶数，于是可用公式$\mathrm{tg}^2x=\sec^2x-1$[或用$-\mathrm{ctg}x\csc x dx=d\csc x$，再用$\mathrm{ctg}^2x=\csc^2x-1$]，将被积函数化为$\sec x$[或$\csc x$]的幂，再用代换$u=\sec x$[或$u=\csc x$]，于是被积表达式化为$u$的多次式，于是可积。

② 若m为偶数而n为奇数，可用公式 $\mathrm{tg}^2x=\sec^2x-1$（或$\mathrm{ctg}^2x=\mathrm{cec}^2x-1$），将被积函数化为$\sec x$（或$\mathrm{cec}x$）的幂，最后用递推公式：

$$\int \sec^n x dx=\frac{\mathrm{tg}x\sec^{n-2}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x dx \tag{3}$$

$$\int \csc^n x dx=-\frac{\mathrm{ctg}x\csc^{n-2}x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x dx \tag{4}$$

③若 m、n 全为偶数，可用$\sec^2x=1+\mathrm{tg}^2x$（或用$\csc^2x=1+\mathrm{ctg}^2x$）。

于是将被积函数都化为$\mathrm{tg}x$(或$\mathrm{ctg}x$)的幂，然后用递推公式

$$\int \mathrm{tg}^n x dx=\frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1}-\int \mathrm{tg}^{n-2}x dx \tag{5}$$

$$\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1}x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2}x dx \qquad (6)$$

关于这四个递推公式，现在只证明其中（3）、（5），其余两个可作为练习，请读者自己推导。关于递推公式（3）的证明：

设 $u = \sec^{n-2}x \qquad \sec^2 x dx = dv$

$du = (n-2)\sec^{n-2}x \mathrm{tg} x dx \qquad v = \mathrm{tg} x$

所以 $\int \sec^n x dx = \sec^{n-2}x \mathrm{tg} x - (n-2)\int \sec^{n-2}x \mathrm{tg}^2 x dx$

但 $\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ 代入上式第二项积分式内，则有

$$\int \sec^n x dx = \sec^{n-2}x \mathrm{tg} x - (n-2)\int \sec^{n-2}x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \sec^{n-2}x \mathrm{tg} x - (n-2)\int \sec^n x dx + (n-2)\int \sec^{n-2}x dx$$

移项化简有：

$$(n-1)\int \sec^n x dx = \sec^{n-2}x \mathrm{tg} x + (n-2)\int \sec^{n-2}x dx$$

于是得：$\int \sec^n x dx = \frac{\sec^{n-2}x \mathrm{tg} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x dx$

关于递推公式（5）的证明：

$$\int \mathrm{tg}^n x dx = \int \mathrm{tg}^{n-2}x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \mathrm{tg}^{n-2}x \sec^2 x dx - \int \mathrm{tg}^{n-2}x dx$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2}x dx$$

关于4）、5）、6）其积分结果如下：

因 $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\sin(m+n)x + \frac{1}{2}\sin(m-n)x$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x - \frac{1}{2}\cos(m+n)x$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\cos(m+n)x + \frac{1}{2}\cos(m-n)x$$

于是有：

$$\int \sin mx \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \sin(m-n)x dx$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad m \neq n \tag{7}$$

同理有：

$$\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n) \tag{8}$$

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m \neq n) \tag{9}$$

（二）三角换元法

这一方法是针对特殊形式的被积函数用 $x=\psi(u)$ 来换元，其中$\psi(u)$是三角函数，下面我们仍通过例题说明这一方法：

例 1 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$的不定积分

解 欲解此题，首先要去掉根号，所以设

$$x = a\mathrm{tg}\theta，则 \quad dx = a\sec^2\theta d\theta$$

于是
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a\sec\theta} = \int \sec\theta d\theta$$

利用本节第（一）段例6的结果有：

$$\int \sec\theta d\theta = \ln |\sec\theta + \mathrm{tg}\theta| + C_1$$

所以
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |\sec\theta + \mathrm{tg}\theta| + C_1$$

为了要把$\sec\theta$及 $\mathrm{tg}\theta$ 换成 x 的函数，可利用图13-5中所示的直角三角形关系，这个直角三角形是根据 $\mathrm{tg}\theta = \frac{x}{a}$作成的，由这直角三角形很快地得到：

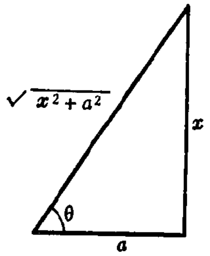


图 13-5

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

因此
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right) + C_1$$

$$= \ln (x + \sqrt{x^2+a^2}) + C_1 - \ln a$$

$$= \ln (x + \sqrt{x^2+a^3}) + C$$

此处$C = C_1 - \ln a$，$x + \sqrt{x^2+a^2} > 0$，故真数不再取绝对值。

例 2 求$\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ 的不定积分

解 设$x = a\sin\theta$，$dx = a\cos\theta d\theta$

原式$= a^2 \int \cos^2\theta d\theta = a^2 \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta d 2\theta\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C$$

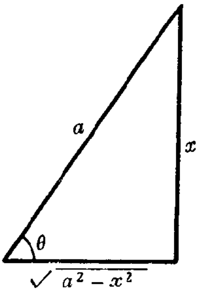


图 13-6

由图 13-6 将 θ 换为 x，我们有：

$$原式=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)+C$$

例 3 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$的不定积分

解 设$x=a\sec\theta$,

$$dx=a\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta d\theta$$

$$原式=\int\sec\theta d\theta=\ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\theta|+C_1$$

由图13-7

$$原式=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

此处$C=C_1-\ln a$

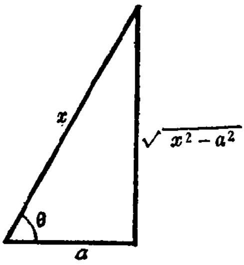


图 13-7

例 4 求$\int\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx$ 的不定积分

解 设 $x=4\sin\theta$，$dx=4\cos\theta d\theta$

$$原式=4\int\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta=4\int\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}d\theta$$

$$=4\int(\csc\theta-\sin\theta)d\theta$$

$$=4\int\csc\theta d\theta-4\int\sin\theta d\theta$$

$$=4\ln|\csc\theta-\mathrm{ctg}\theta|+4\cos\theta+C$$

由图13-8，$\csc\theta=\frac{4}{x}$，$4\cos\theta=\sqrt{16-x^2}$

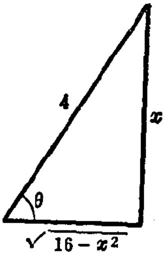


图 13-8

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$$

$$\text{原式}=4\ln\left|\frac{4-\sqrt{16-x^2}}{x}\right|+\sqrt{16-x^2}+C$$

例 5 求$\int\frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$的不定积分

解 设$x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta$，$dx=\sqrt{3}\sec^2\theta d\theta$，

$$\sqrt{3+x^2}=\sqrt{3}\sec\theta$$

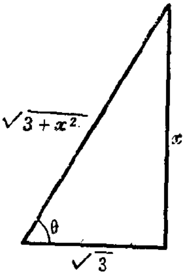


图 13-9

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec\theta\operatorname{tg}\theta}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int\csc\theta d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\operatorname{cec}\theta-\operatorname{ctg}\theta\right|+C$$

由图13-9

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3}}{x}\right|+C$$

例 6 求$\int\sqrt{x^2+a^2}dx$的不定积分

解 设 $x=a\operatorname{tg}\theta$，$dx=a\sec^2\theta d\theta$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=a^2\int\sec^3\theta d\theta$$

设 $u=\sec\theta$，$dv=\sec^2\theta d\theta$，

$du=\sec\theta\operatorname{tg}\theta d\theta$，$v=\operatorname{tg}\theta$。

所以 $\int\sec^3\theta d\theta=\operatorname{tg}\theta\sec\theta-\int\sec\theta\operatorname{tg}^2\theta d\theta$

$$=\operatorname{tg}\theta\sec\theta-\int\sec\theta(\sec^2\theta-1)d\theta$$

$$= \mathrm{tg}\theta\sec\theta - \int \sec^3\theta d\theta + \int \sec\theta d\theta。$$

$$\therefore\ 2\int \sec^3\theta d\theta = \mathrm{tg}\theta\sec\theta + \int\sec\theta d\theta$$

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\theta\sec\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\theta| + C_1$$

由图 13-10, $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a^2}$$

$$+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})] + C$$

这里$C = C_1 - \frac{a^2}{2}\ln a$,同理用$x = a\sec\theta$得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-a^2}$$

$$-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|] + C$$

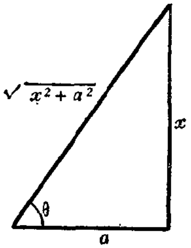


图 13-10

简 短 小 结

总结以上，我们看出，若被积函数含有：

$\sqrt{a^2-x^2}$，即用$x=a\sin\theta$或$x=a\cos\theta$代换；

$\sqrt{x^2-a^2}$，即用$x=a\sec\theta$或$x=a\csc\theta$代换；

$\sqrt{x^2+a^2}$，即用$x=a\mathrm{tg}\theta$或$x=\mathrm{ctg}\theta$代换。

最后，为了进一步扩充基本积分表，我们再举一个被积函数不是三角函数的例题作为本节的结束：

例 7 证明$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

解 $\frac{1}{a^2-x^2} \equiv \frac{1}{(a+x)(a-x)} \equiv \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}$

所以$\frac{1}{a^2-x^2} \equiv \frac{A(a-x)+B(a+x)}{(a+x)(a-x)}$

即 $\dfrac{1}{a^2-x^2}\equiv\dfrac{(B-A)x+a(A+B)}{a^2-x^2}$

因此， $1\equiv(B-A)x+a(A+B)$

比较x的系数与常数项 $B-A=0$，$a(A+B)=1$

故 $A=B$，$A=B=\dfrac{1}{2a}$

因此我们把$\dfrac{1}{a^2-x^2}$分为两个分式之和，

即 $\dfrac{1}{a^2-x^2}\equiv\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{a-x}\right)$

所以 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x+a}-\int\frac{dx}{x-a}\right]$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x+a|-\ln|x-a|]+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

即 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$

在本节中我们所举的许多例题里，有些积分结果在以后求其他积分时常常会遇到，就是说，求其它积分时常常会引用到这一些积分的结果；因此，如果把这些积分的结果当作公式，则在求其他积分时，便可引用这些结果，而免去一部分计算工作，于是把基本积分表扩充如下：

（15）$\displaystyle\int \mathrm{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C$；

（16）$\displaystyle\int \mathrm{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C$；

（17）$\displaystyle\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\mathrm{tg}x|+C$；

(18) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + C$;

(19) $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$;

(20) $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$;

(21) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x + a}{x - a}\right| + C$;

(22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

(23) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2 - x^2}$

$+ a^2 \arcsin\frac{x}{a}] + C$;

(24) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$

$= \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|] + C$。

习 题 13-4

(1) 求下列各式的积分

1) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;　　2) $\int \sin^3 3x dx$;

3) $\int \sec^2 x \sin^3 x dx$;　　4) $\int \cos^3 \frac{x}{2} \csc^4 \frac{x}{2} dx$;

5) $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$;　　6) $\int \operatorname{tg}^4 x dx$;

7) $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;　　8) $\int \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x dx$;

9) $\int \operatorname{tg}^2 2x \sec^4 2x dx$;　　10) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x dx$。

答：1）$\sin^3 x\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\sin^2 x+\frac{1}{7}\sin^4 x\right)+C$；

2）$\frac{1}{3}\cos 3x\left(\frac{1}{3}\cos^2 3x-1\right)+C$；

3）$\sec x+\cos x+C$；

4）$-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$；

5）$2(\sin x)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{3}-\frac{\sin^2 x}{7}\right]+C$；

6）$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x+x+C$；

7）$-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\sin x|+C$；

8）$\operatorname{tg}x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$；

9）$\frac{1}{10}\operatorname{tg}^5 2x+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3 2x+C$；

10）$\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$。

（2）用三角代换法求下列各式的积分

1）$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$；　2）$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$；

3）$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx$；　4）$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$；

5）$\int\frac{\sqrt{25-\theta^2}}{\theta^2}d\theta$；　6）$\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{3/2}}$；

7）$\int\frac{dx}{(x^2-2x+10)^{3/2}}$；

8）$\int\frac{dx}{(16+x^2)^2}$。

答：1）$\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$；

2）$\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$；

3）$-\left(\dfrac{2a^2+3x^2}{15}\right)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$；

4）$-\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+C$；

5）$-\dfrac{\sqrt{25-\theta^2}}{\theta}-\arcsin\dfrac{\theta}{5}+C$；

6）$\dfrac{-t}{\sqrt{t^2+a^2}}+\ln(t+\sqrt{t^2+a^2})+C$；

7）$\dfrac{x-1}{9\sqrt{x^2-2x+10}}+C$；

8）$\dfrac{1}{128}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}+\dfrac{x}{32(16+x^2)}+C$。

§5　有理函数（代数）的积分法

有理函数是指由有理式所表示的函数。

有理式包括：

（一）有理整式：$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

（二）有理分式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

两类，现在我们分别来讨论由它们所表示的函数的积分。为方便起见，下面我们把“所表示的函数”这几个字省去不

说，而简单地说有理整式的积分，有理分式的积分等等。

（一）有理整式的积分法

若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,

则 $$\int f(x)dx=\int(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)dx$$

$$=\int a_0x^ndx+\int a_1x^{n-1}dx+\cdots+\int a_{n-1}xdx$$

$$+\int a_ndx$$

$$=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2$$

$$+a_nx+C$$

所以任何有理整式的积分是很容易求得的。

（二）有理分式的积分法

有理分式是两个有理整式的商，设分子的次数为 n，分母的次数为 m，当 $n<m$ 时，有理分式称为**真分式**，例如

$$\frac{x+5}{x^2+x-1},\quad \frac{3x^2-4}{2x^4-5x^3-x},\quad \cdots\text{等是。}$$

当 $n\geqslant m$ 时，有理分式称为**假分式**，例如

$$\frac{2x^3-4}{x^3+x+5},\quad \frac{x^5-3x^4+x^3+x^2+x-1}{x^3-3x^2+4},\quad \cdots\text{等是。}$$

利用除法，可以把假分式化为有理整式与真分式之和。例如

$$\frac{2x^3-4}{x^3+x+5}=2-\frac{2x+14}{x^3+x+5}$$

$$\frac{x^5-3x^4+x^3+x^2+x-1}{x^3-3x^2+4}=(x^2+1)+\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}$$

有理整式的积分是很容易的，因此在有理分式的积分中主要的是研究真分式的积分。如在

$$\int\frac{x^5-3x^4+x^3+x^2+x-1}{x^3-3x^2+4}dx=\int(x^2+1)dx$$

$$+\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx=\frac{x^3}{3}+x+\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$$

中，主要的是计算$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$。

（1）最简分式

为了解决真分式的积分，须先把真分式分解为最简分式（或称为最简部分分式）。

$\frac{A}{x-a}$，$\frac{A}{(x-a)^n}$，$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$，$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$之和。

其中A、M、N、a、p、q都是实常数，n是自然数，且二次三项式$x^2+px+q=0$是限定$p^2-4q<0$情形，因为此时$x^2+px+q=0$有复根，在我们这本书中基本上不用复数，所以凡是遇到这种情形就不再分解为两个含有复数的一次因子，而是保留二次因子形式：x^2+px+q。为了把真分式分解成部分分式，需要一些代数上的定理，其中有的已超过我们这本书的范围。在这里，只是叙述出来，不予证明。如有兴趣，可在普通的方程式论中，或复变函数论中查到；有些比较简单，不用太大的篇幅即可证明的，我们尽量在这里讲出来。

定理1　**设方程式**

$$x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m=0 \qquad (1)$$

的系数b_1、b_2、b_3、$\cdots b_m$都是实数，若$a=\alpha+\beta i$为其一根，则另一复数$\overline{a}=\alpha-\beta i$亦为其一根（此处$i=\sqrt{-1}$）。

例如　$x^2+x+1=0$，有$\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$为其一根，而

$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$也为其一根（证明从略）。

定理 2　**方程式（1）必有m个根，若已知此m个根为：**

α_1，α_2，…，α_m **（可以是实数，也可以是复数），则此方程式左端可写为m个因子之积。**所以（1）式即化为：

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_m)=0 \qquad (2)$$

（证明从略）

今设$Q(x)=x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$的系数都是实数，当$Q(x)$按（2）式分解后，我们把相同的因子归并在一起，并且为了避免出现复数起见，把对应于一对复数根的因子加以合并。

例如　$(x-a)(x-\bar{a})=[x-(\alpha+\beta i)][x-(\alpha-\beta i)]$

$$=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$$

令　　$-2\alpha=p$，$\alpha^2+\beta^2=q$则有：

$$(x-a)(x-\bar{a})=x^2+px+q$$

这样一来，$Q(x)$便可表达为：

①不重复的一次因子；

②重复的一次因子；

③不重复的二次因子；

④重复的二次因子；

之积，如

$$Q(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x^2+px+q)^\lambda(x^2+rx+s)^\mu\cdots \qquad (3)$$

其中a、b、p、q、r、s…等都是实常数；α、β、λ、μ、…等都是正整数，它们分别表示相关因子的次

数。

例如：$x^3-x=x(x-1)(x+1)$，含有三个不重复的一次因子。

$x^4+x^3-x-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)$，含有两个不重复的一次因子和一个二次因子。

$x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$，含有一个不重复的一次因子和一个重复的一次因子。

下面来谈谈如何把一个真分式化为最简分式的问题。

预备定理 1 **若 A，B 表示 x 的多项式，且没有公因子（即互为素式❶），则可求得二整函数 M、N**

使 $$\boldsymbol{MA+NB\equiv 1} \qquad (4)$$

证 设以 B 去除 A 得商为 q，而余式为 R_1 再以 R_1 去除 B 得商 q_1 而余式为 R_2，最后以 R_2 去除 R_1 得商 q_2 而余常数为 C（$C\neq 0$）。于是有：

① $A\equiv qB+R_1$，　　故 ④ $R_1\equiv A-qB$

② $B\equiv q_1R_1+R_2$，　　⑤ $R_2\equiv B-q_1R_1$

③ $R_1\equiv q_2R_2+C$❷，　　⑥ $C\equiv R_1-q_2R_2$

以⑤内 R_2 之值代入⑥，合并 R_1 与 B 诸项，再以④内 R_1 之值代入结果式内，合并 A 与 B 各同类项，得：

$$\begin{aligned} C&\equiv R_1-q_2R_2\\ &\equiv(1+q_1q_2)R_1-q_2B\\ &\equiv(1+q_1q_2)A-(q+q_2+qq_1q_2)B \end{aligned}$$

以 C 除上面恒等式两端，得：

---

❶ 互素有的书称为互质。

❷ $C\neq 0$，若 $C=0$，则 A 与 B 即不互素，读者自己验证之。

$$1 \equiv \frac{1+q_1q_2}{C}A+\left(-\frac{q+q_2+qq_1q_2}{C}\right)B$$

因C为一个不等于零的常数，故$\frac{1+q_1q_2}{C}$，$-\frac{q+q_2+qq_1q_2}{C}$

为整式，今分别记以M及N，于是

$$MA+NB\equiv 1$$

这个定理的逆定理也是正确的，即若

$MA+NB\equiv 1$，则A与B互为素式。

证 用反证法，假定A与B有公因子，则亦必为$MA+NB$的因子。因此，此因子也必为1的因子，这不可能。故A与B为互素。因此上面的预备定理也可改叙述为：

A、B互素的必要且充分条件为：

存在两个整式M、N，使$MA+NB\equiv 1$。

预备定理2 **设A、B为任意两个多项式，且A的次数高于B，则A恒可以用B表示之。**

证 设以B去除A得商为Q，余式为R，则

$$A\equiv QB+R \qquad ①$$

若Q之次数仍不小于B，则可用B再去除Q，设其商为Q_1，余式为R_1，则

$$Q\equiv Q_1B+R_1 \qquad ②$$

同样，若Q_1的次数仍不小于B，则以B再去除Q_1，设其商为Q_2，余式为R_2，则

$$Q_1\equiv Q_2B+R_2 \qquad ③$$

现在假设Q_2的次数已经小于B的次数了。因得：

$A\equiv QB+R$，将②代入①

得 $$A\equiv(Q_1B+R_1)B+R\equiv Q_1B^2+R_1B+R \quad ④$$

将③代入④

$$A\equiv(Q_2B+R_2)B^2+R_1B+R$$

$$\equiv Q_2B^3+R_2B^2+R_1B+R \quad ⑤$$

⑤式右端，Q_2、R_2、R_1、R的次数均小于B。

总之，任一多项式A，设其次数高于B，则可以按上述方法进行，直至其商的次数小于B为止，则得到

$$A\equiv Q_{r-1}B^r+R_{r-1}B^{r-1}+\cdots+R_1B+R.$$

此处，$R, R_1, \cdots, R_{r-1}$；Q_{r-1}各表示累次余式及最末之商，其次数均小于B的次数。

例 1 以$x-2$表多项式$2x^3-x^2+4x-5$

解 累次用综合除法❶：

$$\begin{array}{rrrrl}
2 & -1 & +4 & -5 & \underline{|2} \\
 & 4 & 6 & 20 & \\
\hline
2 & +3 & +10 & +15 & \therefore R=15 \\
 & 4 & 14 & & \\
\hline
2 & +7 & +24 & & \therefore R_1=24 \\
 & 4 & & & \\
\hline
2 & +11 & & & \therefore R_2=11\text{及}Q_2=2
\end{array}$$

因得

$$2x^3-x^2+4x-5\equiv2(x-2)^3+11(x-2)^2$$
$$+24(x-2)+15$$

例 2 以x^2+x+1表$x^2-4x^4+3x^3-x^2+x+4$

---

❶ 亦可用泰勒公式求得(即$x_0=2$情形)。

解　分离系数法累次作除法

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
A=1 & -4 & +3 & -1 & +1 & +4 & \\
1 & +1 & +1 & & & & \\
\hline
 & -5 & +2 & -1 & & & \\
 & -5 & -5 & -5 & & & \\
\hline
 & & 7 & +4 & +1 & & \\
 & & 7 & +7 & +7 & & \\
\hline
 & & & -3 & -6 & +4 & \\
 & & & -3 & -3 & -3 & \\
\hline
 & & & & -3 & +7 & \therefore\quad R=-3x+7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1+1+1=B \\
\hline
1-5+7-3=Q \\
1+1+1 \\
\hline
\;-6+6-3 \\
\;-6-6-6 \\
\hline
\qquad 12+3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\underline{1+1+1}=B \\
1-6\;\therefore Q_1=x-6 \\
\\
\\
\\
\therefore R_1=12x+3
\end{array}
$$

所以　$x^5-4x^4+3x^3-x^2+x+4\equiv(x-6)(x^2+x+1)^2$

$+(12x+3)(x^2+x+1)-(3x-7)$

定理 3　**二真分式$\dfrac{A}{B}$与$\dfrac{C}{D}$之和（代数和）仍为真分式。**

证　设　$\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm BC}{BD}$

因A的次数低于B，故AD的次数也低于BD；

C的次数低于D，故BC的次数也低于BD。

所以　$AD\pm BC$的次数仍低于BD，故为真分式。

定理 4　**令I及I'表示整式，$\dfrac{A}{B}$及$\dfrac{A'}{B'}$表示真分式若 $I+\dfrac{A}{B}\equiv I'+\dfrac{A'}{B'}$　则$I\equiv I'$　$\dfrac{A}{B}\equiv\dfrac{A'}{B'}$**

证　由　$I+\dfrac{A}{B}\equiv I'+\dfrac{A'}{B'}$

有　$I-I'\equiv\dfrac{A'}{B'}-\dfrac{A}{B}$

但左端$I-I'$表示整式（或零），由定理 3 知右端$\dfrac{A'}{B'}-\dfrac{A}{B}$表示真分式(或零)，因一个整式不会等于一个真分式。所以

$$I-I'\equiv 0, \qquad \frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}\equiv 0$$

即 $$I\equiv I', \qquad \frac{A}{B}\equiv\frac{A'}{B'}$$

定理 5　**设$\frac{A}{PQ}$为真分式，且分母中 P、Q 为互素式，则此真分式可化为两个真分式**

$$\frac{B}{P}\text{与}\frac{C}{Q}$$

之和，即 $$\frac{A}{PQ}=\frac{B}{P}+\frac{C}{Q} \qquad (5)$$

证　因P、Q为二互素式，由预备定理1，知恒存在二个整式M及N，使

$$1\equiv MQ+NP$$

两边以A乘之得： $$A\equiv AMQ+ANP$$

所以 $$\frac{A}{PQ}=\frac{AMQ+ANP}{PQ}=\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q} \qquad ①$$

若能证明 $\frac{AM}{P}$及$\frac{AN}{Q}$为真分式，则定理得证。

如果 $\frac{AM}{P}$及$\frac{AN}{Q}$不为真分式，则应化为整式与一个真分式之和，即

$$\frac{AM}{P}\equiv I+\frac{B}{P}, \qquad \frac{AN}{Q}\equiv K+\frac{C}{Q} \qquad ②$$

将②代入① $$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+I+K \qquad ③$$

但$\frac{A}{PQ}$、$\frac{B}{P}$、$\frac{C}{Q}$为真分式，由定理3、定理4知$I+K\equiv 0$，

所以　.

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q} \qquad ④$$

定理中④式表达式为唯一的。

不然设其还有其他分法为：

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}\equiv\frac{B'}{P}+\frac{C'}{Q} \qquad ⑤$$

此处 $\frac{B'}{P}$，$\frac{C'}{Q}$也为真分式，则

$$\frac{B-B'}{P}\equiv\frac{C'-C}{Q}$$

以 Q 乘两边得：

$$\frac{(B-B')Q}{P}\equiv C'-C \qquad ⑥$$

但除非 $B-B'\equiv 0$及$C'-C\equiv 0$外，⑥式不可能成立，这是因为P与Q互素，$B-B'$的次数又小于P。因此P不可能整除（$B-B'$）Q。所以$B=B'$，$C=C'$。

我们把$\frac{B}{P}$，$\frac{C}{Q}$叫做真分式$\frac{A}{PQ}$的部分分式，若P及Q为一次式或x^2+px+q型（$p^2-4q<0$）的二次式，则$\frac{B}{P}$，$\frac{C}{Q}$就是最简分式（在实数范围内不能再分）。

推论 **设$\frac{A}{PQ\cdots S}$为真分式，其分母，P、Q、……S为互素式，则**

$$\frac{A}{PQ\cdots S}\equiv\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\cdots+\frac{F}{S} \qquad (6)$$

其中$\frac{B}{P}$，$\frac{D}{Q}$，…，$\frac{F}{S}$为真分式。

证 可应用定理 5 的结果先分为：

$$\frac{A}{PQ\cdots S}\equiv\frac{B}{P}+\frac{G}{Q\cdots S}$$

再把$\frac{G}{Q\cdots S}$分为$\frac{D}{Q}$，$\frac{E}{R\cdots S}$。以此继续分下去即得证。

定理 6　**设$\frac{A}{PQ^3}$为真分式，其中P与Q互素**

则
$$\frac{A}{PQ^3}=\frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3} \qquad (7)$$

此处B的次数低于P，C_1、C_2、C_3的次数低于Q。

证　由定理 5 有：

$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q^3}$$

又因$Q^3=Q\times Q\times Q$，而Q与Q之间已经不为互素式，故不能再应用定理 5 继续分下去了。但因C的次数低于Q^3，故可用预备定理 2，把C化为下列形式：

$$C\equiv C_1Q^2+C_2Q+C_3$$

此处，C_1，C_2及C_3的次数均低于Q。

以Q^3除此恒等式两端得：

$$\frac{C}{Q^3}\equiv\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}$$

因得
$$\frac{A}{PQ^3}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}$$

推论
$$\frac{A}{PQ^r}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\cdots+\frac{C_r}{Q^r} \qquad (8)$$

总结定理 5 、 6 ，可以得到下面几条结论：

1.若分母中有一个不重复的一次因子（$x-a$），则此真分式就有一个分式：$\frac{A}{x-a}$。

2.若分母中有一个重复β次的一次因子（$x-b$），则此真分式就有β个分式：

$$\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

3.若分母中有一个二次因子（x^2+px+q），（$p^2-4q<0$），则此真分式就有一个分式：

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

4.若分母中有一个重复μ次的二次因子（x^2+rx+s），（$r^2-4s<0$）则此真分式就可以有μ个分式：

$$\frac{R_1x+s_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+s_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots+\frac{R_\mu x+s_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

现在我们再把这四条总结写成一个定理如下：

定理　**设$Q(x)$分解成定理2中（3）式的形式：即**

$$\boldsymbol{Q(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots}$$
$$\boldsymbol{(x^2+px+q)^\lambda(x^2+rx+s)^\mu\cdots}$$

则真分式可分解成为最简分式之和：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots$$

$$+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\cdots$$

$$+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}。\qquad (9)$$

由这个定理，我们可以看出，真分式分解出的最简分式的形式已完全确定，只要再求出每一个最简分式中分子里的常数A、B、M、N、R、S等，分解便完成了。要确定这些常数，可用待定系数法，下面举一些把真分式化为最简分式的例子。

例 1 化$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$为最简分式

解 $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

将右端通分得：

$$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$\equiv\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

分母既相同，其分子必恒等，即

$$x^2+x-3\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)$$
$$+C(x-1)(x-2)$$

此式现为恒等式，所以任何值代x均适合，故可设

$x=1$：　$-1=A(-1)(-2)$，　$\therefore A=-\frac{1}{2}$；

$x=2$：　$3=B(-1)\times1$，　$\therefore B=-3$；

$x=3$：　$9=C\times2\times1$，　$\therefore C=\frac{9}{2}$。

故 $$\frac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{x-2}+\frac{9}{2(x-3)}。$$

例 2 将分式$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$分解为最简分式

解 因（$x-1$）是三重因子，故设

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

将右边通分后，我们有：

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\equiv\frac{A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2}{x(x-1)^3}$$

所以 $x^3+1\equiv A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2$

令 $x=1$， 得 $B=2$

$x=0$， 得 $A=-1$

所以 $x^3+1\equiv-(x-1)^3+2x+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2$

$x^3+1\equiv(D-1)x^3+(3+C-2D)x^2$

$-(1+C-D)x+1$

比较x^3的系数：$1=D-1$，$\therefore D=2$

比较x^2的系数：$0=3+C-2D$，将$D=2$代入得$C=1$

所以 $$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$$

例 3 将$\frac{4}{x^3+4x}$分解成最简分式

解 设 $$\frac{4}{x^3+4x}\equiv\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\frac{4}{x^3+4x}\equiv\frac{A(x^2+4)+(Bx+C)x}{x^3+4x}$$

所以 $4\equiv A(x^2+4)+(Bx+C)x$,

$4\equiv(A+B)x^2+Cx+4A$,

两边比较系数

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ C&=0\\ 4A&=4 \end{aligned}\right\}\quad \text{所以 } A=1,\ B=-1,\ C=0$$

因之，
$$\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}。$$

例 4 将分式$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}$分解成最简分式

解 因(x^2+2)为二重因子，故设

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\equiv\frac{(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$

$$x^3+x^2+2\equiv(Ax+B)+(Cx+D)(x^2+2)$$

$$x^3+x^2+2\equiv Cx^3+Dx^2+(A+2C)x+(B+2D)$$

比较左右两边同次项的系数

$$C=1,\ D=1,\ A+2C=0,\ B+2D=2$$

所以 $A=-2,\ B=0,\ C=1,\ D=1$

故有：
$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+2}.$$

例 5 化$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}$为最简分式

解 因在(x^2-x+1)中$p^2-4q=(-1)^2-4=-3<0$，

$$\therefore\quad \frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}\equiv\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{E}{x-3}$$

$$5x^2-4x+16\equiv(Ax+B)(x-3)+(Cx+D)(x^2-x+1)(x-3)+E(x^2-x+1)^2$$

在此式右端按x的降幂排列，然后左、右两端比较x幂的系

数，将所得到的方程组解之，可求A、B、C、D、E。但若按下法解之可以更简捷些：

先设$x=3$代入上式得：

$$49=49E \quad \therefore E=1$$

将$E=1$代入之，然后移到左端，化简后两端以$(x-3)$除之，得：

$$-(x^3+x^2+x+5)\equiv Ax+B+(Cx+D)(x^2-x+1)$$

再以(x^2-x+1)除两端，得：

$$-x-2-\frac{2x+3}{x^2-x+1}\equiv\frac{Ax+B}{x^2-x+1}+Cx+D$$

由定理4比较恒等式两端整式，真分式（指分子）的系数，即得：

$$-x-2\equiv Cx+D, \quad \therefore C=-1, \; D=-2。$$

$$-2x-3\equiv Ax+B, \quad \therefore A=-2, \; B=-3。$$

所以
$$\frac{5x^2-4x+16}{(x^2-x+1)^2(x-3)}=-\frac{2x+3}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}+\frac{1}{x-3}$$

例 6 化$\dfrac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}$为最简分式

解 此题若按前边讲的方法：

$$原式\equiv\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}+\frac{D}{(x-2)^4}+\frac{E}{(x-2)^5}$$

然后求出A、B、C、D、E。是可以的；但对此题若先把分子以$x-2$的幂的形式表示则就更简单：

$$
\begin{array}{rrrrrl}
1 & +1 & -8 & +6 & -32 & \underline{|\,2} \\
 & 2 & 6 & -4 & 4 & \\ \hline
1 & +3 & -2 & 2 & -28 & \\
 & 2 & 10 & 16 & & \\ \hline
1 & +5 & +8 & 18 & & \\
 & 2 & 14 & & & \\ \hline
1 & +7 & +\underset{\sim\sim}{22} & & & \\
 & 2 & & & & \\ \hline
1 & +9 & & & &
\end{array}
$$

所以 $x^4+x^3-8x^2+6x-32=(x-2)^4+9(x-2)^3$

$+22(x-2)^2+18(x-2)-28$

以$(x-2)^5$除两端：

$$\frac{x^4+x^3-8x^2+6x-32}{(x-2)^5}=\frac{1}{x-2}+\frac{9}{(x-2)^2}$$

$$+\frac{22}{(x-2)^3}+\frac{18}{(x-2)^4}-\frac{28}{(x-2)^5}.$$

习　题　13-5

分解下列各式为最简分式：

1) $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$;　　2) $\dfrac{x+1}{x(x-1)^3}$;

3) $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$;　　4) $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$;

5) $\dfrac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

6) $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$;

7) $\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$;　　8) $\dfrac{8x+2}{x-x^3}$;

9) $\dfrac{x^3-x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$;　　10) $\dfrac{2x^3-x^2+1}{(x-2)^4}$;

11) $\dfrac{x-1}{2x^3-5x^2-12x}$;　　12) $\dfrac{6}{2x^4-x^2-1}$;

13) $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-3}{(x+3)^5}$;　　14) $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$;

15) $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)(x-1)}$;　　16) $\dfrac{3x-1}{(x-2)(x^2+1)}$;

17) $\dfrac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$;　　18) $\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$;

19) $\dfrac{3x^2-x+2}{(x^2-2)(x^2-x-2)}$;

20)* $\dfrac{x^2+px+q}{(x-a)(x-b)(x-c)}$;

21)* $\dfrac{2x^3-3x-2}{x(x-1)^2(x+3)^3}$;　　22) $\dfrac{x^3+x+3}{x^4+x^2+1}$。

答：1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x^2+x+1}$;

2) $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$;

3) $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$;

4) $\dfrac{8}{5(2x+1)}+\dfrac{3}{5(3x-1)}$;

5) $-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{8}{x+2}-\dfrac{6}{x+3}$;

6) $-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{11}{2(x-2)}+\dfrac{9}{x-3}$

$+\dfrac{9}{2(x-4)}$;

7) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-x+1}$;

8) $\frac{2}{x}+\frac{3}{1+x}+\frac{5}{1-x}$;

9) $x+2+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}$;

10) $\frac{2}{x-2}+\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{20}{(x-2)^3}+\frac{13}{(x-2)^4}$;

11) $\frac{1}{12x}+\frac{3}{44(x-4)}-\frac{10}{33(2x+3)}$;

12) $-\frac{4}{2x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$;

13) $\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{21}{(x+3)^3}+\frac{76}{(x+3)^4}$

$-\frac{98}{(x+3)^5}$;

14) $\frac{x}{x^2+1}-\frac{x-1}{x^2+2}$;

15) $\frac{3}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x-3)}+\frac{13}{(x-3)^2}$;

16) $\frac{1}{x-2}-\frac{x-1}{x^2+1}$;

17) $\frac{2x-4}{x^2+x+1}+\frac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}$

$-\frac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}$;

18) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$;

19) $\frac{1}{x^2+2}+\frac{2}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+1)}$;

20) $\frac{a^2+pa+q}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x-a}$

$$+\frac{b^2+pb+q}{(b-a)(b-c)}\cdot\frac{1}{x-b}$$

$$+\frac{c^2+pc+q}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{x-c};$$

21） $$-\frac{2}{27x}+\frac{25}{256(x-1)}-\frac{3}{64(x-1)^2}$$

$$-\frac{163}{6912(x+3)}-\frac{35}{288(x+3)^2}$$

$$-\frac{25}{48(x+3)^3};$$

22） $$\frac{4x+3}{2(x^2+x+1)}-\frac{2x-3}{2(x^2-x+1)}。$$

（2）有理分式的积分

我们知道了部分分式的理论，并学会将真分式分解成最简分式。让我们回到有理分式的积分问题上来。现在有理分式的积分已变成下面四种类型的部分分式的积分问题了。

① $\int\frac{A}{x-a}dx$；　② $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$；

③ $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$；　④ $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$。

这四种类型的积分都是可以解决的，分别求之如下：

① $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

② $$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}$$

$$=\frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1}+C$$

$$=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$$

③ $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

在这个被积分式中，分子有 x 一次项和常数项，又因

$$d(x^2+px+q)=(2x+p)dx$$

因此我们想法在被积分式中能分出一个真分式

$$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$$

因为它的积分为 $\ln(x^2+px+q)$ 是很显然的，于是对被积分式的分子先作如下的处理：

因 $$Mx+N=M\left(x+\frac{N}{M}\right)=\frac{M}{2}\left(2x+\frac{2N}{M}\right)$$

$$=\frac{M}{2}\left(2x+p-p+\frac{2N}{M}\right)$$

$$=\frac{M}{2}(2x+p)+\frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)$$

$$=\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)。$$

再对分母作如下安排：

$$x^2+px+q=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)$$

$$\times \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)$$

$$+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)$$

$$+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C。$$

$\because\ 4q-p^2>0$，$\therefore\ \sqrt{4q-p^2}$ 是实常数。

④ $$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p-p+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}dx$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

第一个积分：

$$\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n}$$

$$=\frac{(x^2+px+q)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

$$=\frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}+C_1。$$

第二个积分：

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n}$$

令 $x+\frac{p}{2}=z$，$\frac{4q^2-p^2}{4}=a^2$（因$p^2-4q<0$）

则第二个积分就化下列形式：

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n}$$

的积分，现在要对这个积分，求出它的递推公式，我们是这样进行的：

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{z^2+a^2-z^2}{(z^2+a^2)^n}dz$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^n}$$

其中$\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^n}$用分部积分法积之如下：

设 $u=z$; $\frac{zdz}{(z^2+a^2)^n}=dv$;

$du=dz$; $v=\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(z^2+a^2)^{n-1}}$.

$$\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^n} = \frac{z}{2(1-n)(z^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}$$

将此结果代入$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n}$的右端，故得：

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2}\left[\frac{z}{(1-n)(z^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{z}{2a^2(n-1)(z^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left[1+\frac{1}{2(1-n)}\right]\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}$$

$$= \frac{z}{2a^2(n-1)(z^2+a^2)^{n-1}}$$

$$+\frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^{n-1}}\right.$$

$$\left.+(2n-3)\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

这样，我们就得到一个递推公式：

$$\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right.$$

$$\left.+(2n-3)\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right] \qquad (10)$$

若累次应用这个公式，不难看出，除已积出的项外，最后一个积分应是：

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\frac{u}{a}+C_2$$

于是，第④型的积分问题就完全解决了。

因为就理论上来说，每一个有理函数都可以表作多项式与部分分式之和，而多项式与部分分式的积分又都是初等函数。因此我们可以说，**每一个有理函数的积分都是初等函数。**

例 1 求 $\int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$ 的不定积分

解 $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)x+C(x-1)x}{x(x-1)(x+2)}$$

所以 $2x+3\equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)x+C(x-1)x$

令 $x=0$ 代入得， $3=-2A$， $\therefore A=-\frac{3}{2}$

又设$x=1$ 代入得， $5=3B$， $\therefore\ B=\frac{5}{3}$

再设 $x=-2$ 代入得，$-1=6C$，$\therefore C=-\dfrac{1}{6}$

所以 $\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\equiv-\dfrac{3}{2x}+\dfrac{5}{3(x-1)}-\dfrac{1}{6(x+2)}$ $\displaystyle\int\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}dx$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{3}\int\frac{d(x-1)}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{d(x+2)}{x+2}$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C$$

例 2 求 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ 的不定积分

解 由P.60例 2 知：

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$$

因此 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}$

$$=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^3}+\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}+2\int\frac{d(x-1)}{x-1}$$

$$=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C$$

例 3 求 $\displaystyle\int\frac{4dx}{x^3+4x}$ 的不定积分

解 由P.61例 3 知：

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$$

因此 $\int\frac{4dx}{x^3+4x}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+4}=\int\frac{dx}{x}$

$-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$

例 4 求 $\int\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}dx$ 的不定积分

解 由P.62例 4 知:

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}+\frac{x+1}{x^2+2}$$

因此 $\int\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}dx=-\int\frac{2xdx}{(x^2+2)^2}+\int\frac{(x+1)dx}{x^2+2}$

$=\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$

例 5 求 $\int\frac{x^3-2x^2}{x^2+9}dx$的不定积分

因被积函数为假分式，所以可先用除法化为整式与真分式之和

即 $$\frac{x^3-2x^2}{x^2+9}=x-2+\frac{-9x+18}{x^2+9}$$

所以 $\int\frac{x^3-2x^2}{x^2+9}dx=\int(x-2)dx-9\int\frac{xdx}{x^2+9}+18$

$\times\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{9}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}+18\int\frac{dx}{x^2+3^2}$

$=\frac{1}{2}x^2-2x-\frac{9}{2}\ln(x^2+9)+6\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$

例 6 求 $\int\frac{2x}{(x-1)^2(x+2)}dx$ 的不定积分

解 $\frac{2x}{(x-1)^2(x+2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$

$\equiv\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$

所以 $2x \equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$

或 $2x \equiv (A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)$

左、右比较 x 的同次幂的系数，有：

$$\left.\begin{array}{ll} A & +C=0 \\ A+B & -2C=2 \\ -2A+2B & +C=0 \end{array}\right\}$$

解之 $A=\frac{4}{9}$， $B=\frac{2}{3}$， $C=-\frac{4}{9}$.

所以 $\frac{2x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x+2}$

$$\int\frac{2xdx}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{4}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{4}{9}\int$$

$$\times\frac{dx}{x+2}=\frac{4}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{4}{9}\ln|x+2|+C$$

$$=\frac{4}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{2}{3(x-1)}+C$$

例 7 求 $\int\frac{4x^2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}dx$ 的不定积分

解 $\frac{4x^2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}$

$$\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$\equiv\frac{A(x-1)(x^2-x+1)+B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}$$

所以 $4x^2 \equiv A(x-1)(x^2-x+1)+B(x^2-x+1)$

$+(Cx+D)(x-1)^2$

因此式为恒等式， x 为任何值等式左右均相等，故

设 $x=1$ 得 $4=B$，代入上式

$4x-4=(A+C)x^3+(D-2A-2C)x^2+(C-2D$

$+2A)x+D-A$

$$\left.\begin{array}{r} A+C \qquad =0 \\ -2A-2C+D=0 \\ 2A+C-2D=4 \\ -A \qquad +D=-4 \end{array}\right\}$$

解之， $D=0$， $A=4$， $C=-4$。 所以

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\frac{4}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4x}{x^2-x+1}$$

$$\int\frac{4x^2}{(x-1)^2(x^2-x+1)}\,dx=\int\frac{4dx}{x-1}+\int\frac{4dx}{(x-1)^2}$$

$$-\int\frac{4xdx}{x^2-x+1}=4\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}-4\int\frac{xdx}{x^2-x+1}$$

但 $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

所以 $\displaystyle\int\frac{4x^2dx}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=4\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}$

$$-2\ln(x^2-x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

例 8 求 $\displaystyle\int\frac{x-3}{x^3-x}dx$ 的不定积分

解 $\displaystyle\frac{x-3}{x^3-x}\equiv\frac{x-3}{x(x-1)(x+1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$

$$\equiv\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

所以　$x-3 \equiv A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$

即　$x-3 \equiv (A+B+C)x^2+(B-C)x-A$

比较两边 x 同次幂的系数

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0 \\ B-C&=1 \\ A\qquad&=3 \end{aligned}\right\} \therefore 有 A=3,\ B=-1,\ C=-2$$

故　$\displaystyle\int\frac{x-3}{x^3-x}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x+1}$

$$=3\ln|x|-\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\frac{|x|^3}{|x-1|(x+1)^2}+C$$

例 9　求 $\displaystyle\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$ 的不定积分

解　$\displaystyle\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\equiv\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$$

$$\equiv\frac{A(x-2)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)^2}$$

$\therefore$　$x-5\equiv A(x-2)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-2)$

令 $x=-1$：　$-6=9A$，　$\therefore A=-\dfrac{2}{3}$

$x=2$：　$-3=3B$，　$\therefore B=-1$

$x=0$：　$-5=4A+B-2C$，　$\therefore C=\dfrac{2}{3}$

所以　$\displaystyle\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx=-\int\frac{dx}{(x-2)^2}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}$

$$+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{3}\ln|x+1|$$

$$+\frac{2}{3}\ln|x-2|+C=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$$

例 10 求 $\int\frac{12}{x^4+x^3-x-1}dx$ 的不定积分

解 $$\frac{12}{x^4+x^3-x-1}\equiv\frac{12}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)}{x^4+x^3-x-1}$$

$$+\frac{(Cx+D)(x+1)(x-1)}{x^4+x^3-x-1}$$

$$12\equiv A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)$$

$$+(Cx+D)(x+1)(x-1).$$

令 $x=1$： $12=6B$， $\therefore B=2$.

$x=-1$： $12=-2A$， $\therefore A=-6$.

$x=0$： $12=-A+B-D$， $\therefore D=-4$.

$x=2$： $12=7A+21B+3(2C+D)$， $\therefore C=4$.

所以 $$\int\frac{12dx}{x^4+x^3-x-1}=-6\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$+4\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

又 $$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}ax=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1$$

所以 $\int\frac{12dx}{x^4+x^3-x-1}=-6\ln|x+1|+2\ln|x-1|$

$$+2\ln(x^2+x+1)-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=2\ln\frac{|x-1|(x^2+x+1)}{|x+1|^3}-4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

例 11 求 $\int\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx$ 的不定积分

解 $\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}\equiv\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x(x^2-1)^2}$

$$\equiv\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

通分后，就有：

$$3x^4+x^3+4x^2+1\equiv A(x^2+1)^2+(Bx+C)x+(Dx+E)x(x^2+1)$$

即 $3x^4+x^3+4x^2+1\equiv(A+D)x^4+Ex^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A$

比较两边 x 同次幂的系数

$$\left.\begin{aligned}A \qquad\qquad +D \qquad &= 3\\ E &= 1\\ 2A+B \qquad +D \qquad &= 4\\ +C \qquad +E &= 0\\ A \qquad\qquad\qquad &= 1\end{aligned}\right\}$$

解之，得　$A=1$，$B=0$，$C=-1$，$D=2$，$E=1$。所以

$$\text{原式}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$$

$$+\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)}+\int\frac{dx}{(x^2+1)}$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$+\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\ln|x|+\ln(x^2+1)+\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$$

但　$\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$可用一次分部积分法：

设　$u=x$　　$\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=dv$

$du=dx$　　$v=\frac{-1}{2(x^2+1)}$

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C_1$$

所以　$\int\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}dx$

$$=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\ln|x|(x^2+1)+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$$

到此我们已经举了足够多的例子，其中主要关键在于能

把有理分式化为最简分式，希望读者能掌握这一关键。

习　题　13-6

（１）在下列各题中，试把被积函数的分母通过配方手续，化成基本积分形式，写出各积分：

例如：

$$\int\frac{dx}{9x^2-6x-8}=\int\frac{dx}{(3x-1)^2-9}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x-1)}{(3x-1)^2-3^2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2\times3}\ln\left|\frac{(3x-1)-3}{(3x-1)+3}\right|+C$$

$$=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+2}\right|+C。$$

１）$\int\frac{dx}{x^2+4x+3}$；　　２）$\int\frac{5dx}{x^2-8x+25}$；

３）$\int\frac{dx}{2x-x^2-10}$；　　４）$\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$；

５）$\int\frac{dx}{x^2+2x}$；　　６）$\int\frac{dx}{4x-x^2}$；

７）$\int\frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$；　　８）$\int\frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}}$；

９）$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$；　　10）$\int\frac{2dx}{\sqrt{7x+4x^2}}$。

答：１）$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$；

２）$\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C$；

３）$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{3}+C$；

4) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$；

5) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$；

6) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-4}\right|+C$；

7) $\arcsin\frac{x-1}{4}+C$；

8) $\ln\left|x-3+\sqrt{11-6x+x^2}\right|+C$；

9) $\arcsin(x-1)+C$；

10) $\ln\left|x+\frac{7}{8}+\sqrt{x^2+\frac{7x}{4}}\right|+C$。

（ 2 ）在下列各题中，先把原题适当地分成若干个函数的积分的代数和，然后求出各积分。

例如

$$\int\frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+5)}+\int\frac{3dx}{x^2+2x+5}$$

$$=\int\frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5}+3\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}$$

$$=\ln(x^2+2x+5)+\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{2}+C$$

1) $\int\frac{(2x+3)dx}{4x^2+1}$；　　2) $\int\frac{(6x-1)}{1-9x^2}dx$，；

3) $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$；　　4) $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}$；

5) $\int\frac{(x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　　6) $\int\frac{(8x-3)dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}$。

答：1) $\frac{1}{4}\ln(4x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}2x+C$；

2) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right|-\frac{1}{3}\ln|9x^2-1|+C$;

3) $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$

$+C$;

4) $\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

5) $-\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$;

6) $-2\sqrt{12x-4x^2-5}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2}$

$+C$。

（3）运用化被积函数成为部分分式的手续，求出下列各积分。

1) $\int\frac{dx}{1+x^3}$;　　2) $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}dx$;

3) $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$;　　4) $\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$;

5) $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}$;

6) $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;

7) $\int\frac{32xdx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$;

8) $\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$。

以下各题选作

9) $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$;　　10) $\int\frac{5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$;

11) $\int\frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)}$;　　12) $\int\frac{dx}{(1+x^2)^4}$;

13） $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$；　　14） $\int\frac{dx}{x^6+1}$；

15） $\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$；

16） $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$；

17） $\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}$；　　18） $\int\frac{dx}{(x^4+1)^2}$；

19） $\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}$；　　20） $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$；

21） $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$；　22） $\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$；

23） $\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$。

答：1） $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$；

2） $\frac{1}{6}\ln|x(x+3)^2(x-2)^3|+C$；

3） $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$；

4） $\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$；

5） $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\text{arctg}x+C$；

6） $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^6}{(x+3)^7}\right|+C$；

7） $\ln|2x-1|-6\ln|2x-3|+5\ln|2x-5|+C$；

或 $\ln\frac{|2x-1||2x-5|^5}{|2x-3|^6}+C$；

8) $C-\frac{11}{2(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}$;

9) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C$;

10) $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}$

$+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C$;

11) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}+C$;

12) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C$;

13) $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}+C$;

14) $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\ \frac{1+\sqrt{3}\,x+x^2}{1-\sqrt{3}\,x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$

$+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C$;

15) $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$

$-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

16) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

17) $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$

$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

18) $\dfrac{x}{4(x^4+1)}+\dfrac{3}{16\sqrt{2}}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x-\sqrt{2}\,x+1}$

$-\dfrac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{2}\,x}{x^2-1}+C$;

19) $\dfrac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\dfrac{21}{128}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

$-\dfrac{21}{64}\operatorname{arctg}x+C$;

20) $\dfrac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}+C$;

21) $-\dfrac{x}{x^5+x+1}+C$;

22) $-\dfrac{8x^4+8x^2+4x-1}{28(x^3+x+1)^2}+C$;

23) $\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$。

§6 三角函数的有理式的积分法

如果组成某一式子时对变量 x 所施行的运算只限于四则运算（四则运算也称为有理运算），这式子就称为 x 的有理式，我们用 $R(x)$ 表示 x 的有理式，例如

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{x(2+x^2)},\quad 2x-1,\quad \frac{x^5+x^2-1}{x^2+1}$$

都是 x 的有理式，我们在前一节中已详细地讨论了这种有理式的积分问题。

仿照上面 x 的有理式的定义，可给出三角函数的有理式的定义。如果对三角函数只施行四则运算，则组成的式子就

称为三角函数的有理式。我们用：

$$R(\sin x, \cos x)$$

表示三角函数的有理式。在括弧中，我们没有把$\operatorname{tg} x$，$\operatorname{ctg} x$，$\sec x$，$\csc x$等表示出来，因为它们可以表示为$\sin x$和$\cos x$的商、倒数等形式。$R(\sin x, \cos x)$的例子如：

$$\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)},\quad \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x},\quad \frac{1}{5+4\sin 2x}\text{等。}$$

下面让我们来证明积分：

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

可用置换 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$，即 $x=2\operatorname{arctg} u$，化$R(\sin x, \cos x)$为$R(u)$，即将三角函数的有理函数的积分化为代数上的有理函数的积分。而后者在前一节中已解决了。因之三角函数的有理式的积分也是容易解决的。

因 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$=\frac{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$$

又 $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$

$$=\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\div\sec^2\frac{x}{2}$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

又因 $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，所以 $x=2\operatorname{arctg}u$，$dx=\frac{2}{1+u^2}du$

所以

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx$$

$$=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du$$

上式右边是 u 的有理函数的积分，到此问题全部解决了。

例 1 求 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ 的不定积分

解 因为这个被积函数是 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的有理函数，故用上法置换后，立即得到：

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$$

$$=\int\frac{\left(1+\frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\int(u+2+u^{-1})du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$$

例 2 求$\int\frac{dx}{3+5\cos x}$的不定积分

解 原式$=\int\frac{2du}{(1+u^2)\left(3+5\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}$

$$=\int\frac{du}{4-u^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+u}{2-u}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C$$

例 3 求$\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}$的不定积分

解 令 $2x=z$，则 $2dx=dz$

所求积分化为：

$$\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{5+4\sin z}$$

再令 $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=u$

则 $\sin z=\frac{2u}{1+u^2}$，$dz=\frac{2du}{1+u^2}$

于是，$\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{5+4\frac{2u}{1+u^2}}$

$$=\int\frac{du}{5u^2+8u+5}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{u^2+\frac{8}{5}u+1}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{du}{\left(u+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{\frac{3}{5}}\text{arctg}\left(\frac{u+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{5u+4}{3}\right)+C，\quad 因为\quad u=\text{tg}\frac{z}{2}=\text{tg}x$$

所以 $\int\frac{dx}{5+4\sin 2x}=\frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{5\text{tg}x+4}{3}\right)+C$

对于这一类型的积分用化为代数有理函数的方法，固然都可以积出来，但是在计算上往往很繁，若能用其他方法解决，最好避免不用。

例 4 求$\int\frac{dx}{1+\cos x}$的不定积分

解 原式$=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\sec^2\frac{x}{2}\,d\frac{x}{2}=\text{tg}\frac{x}{2}+C$。

例 5 求$\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$的不定积分

解 原式$=\int\frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}$

$$=\ln|a\cos x+b\sin x|+C$$

例 6 求$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}$的不定积分

解 原式$=\int\frac{\frac{1}{b^2}\sec^2xdx}{\frac{a^2}{b^2}+\text{tg}^2x}$

$$=\frac{1}{b^2}\int\frac{d\text{tg}x}{\frac{a^2}{b^2}+\text{tg}^2x}=\frac{1}{b^2}\frac{1}{\frac{a}{b}}\text{arctg}\frac{\text{tg}x}{\frac{a}{b}}$$

$$+C=\frac{1}{ab}\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\text{tg}x\right)+C$$

例 7 求$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x}$的不定积分

解 原式$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x}$

令$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$，则$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$

$$原式=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(\alpha+x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\csc(\alpha+x)d(\alpha+x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln|\csc(\alpha+x)-\operatorname{ctg}(\alpha+x)|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\csc\left(\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+x\right)\right.$$

$$\left.-\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+x\right)\right|+C$$

习 题 13-7

求下列各式的不定积分：

1）$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}$；　　2）$\int\frac{(1+\operatorname{tg}x)dx}{\sin 2x}$；

3）$\int\frac{dx}{5-3\cos x}$；　　4）$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$；

5）$\int\frac{dx}{5-4\cos 2x}$；　　6）$\int\frac{\cos x dx}{1+\cos x}$；

7）$\int\frac{dx}{2+\sin x-\cos x}$；　　8）$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-7}$，

9) $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin x}$;　　　10) $\int \frac{\sin^5 5x}{\cos^4 x} dx$;

11) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$。

答：1) $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}\right) \right| + C$;

2) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x + \ln|\operatorname{tg}x|) + C$;

3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$;

4) $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$;

5) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x) + C$;

6) $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$;

7) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C$;

8) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{3-11\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{6}} + C$;

9) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sin^2 x + C$;

10) $-\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C$;

11) $\ln|\cos x + \sin x| + C$。

§ 7　简单无理函数的积分法

（一）$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)dx$型

其中n为正整数，R表示有理式。

令　$\frac{ax+b}{cx+h}=u^n$，则$x=\frac{hu^n-b}{a-cu^n}$

$$dx=\frac{ah-bc}{(a-cu^n)^2}nu^{n-1}du$$

则，原式$=\int R\left(\frac{hu^n-b}{a-cu^n},\ u\right)\frac{ah-bc}{(a-cu^n)^2}nu^{n-1}du$

$=\int R^*(u)du$，R^*表示有理式，加以＊号，以便区别于R，它们表示不同的两个有理式，于是由§ 6知$R^*(u)$为可积。

例 1　求$\int\frac{dx}{x-\sqrt[3]{3x+2}}$的不定积分

解　设$\sqrt[3]{3x+2}=t$，由此得$x=\frac{t^3-2}{3}$，$dx=t^2dt$

于是

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt[3]{3x+2}}=\int\frac{t^2dt}{\frac{t^3-2}{3}-t}=\int\frac{3t^2dt}{t^3-3t-2}$$

$$=\int\left[\frac{-1}{(t+1)^2}+\frac{5}{3(t+1)}+\frac{4}{3(t-2)}\right]dt$$

$$=-\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t-2}$$

$$=\frac{1}{t+1}+\frac{5}{3}\ln|t+1|+\frac{4}{3}\ln|t-2|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{3x+2}+1}+\frac{5}{3}\ln\left|\sqrt[3]{3x+2}+1\right|$$

$$+\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[3]{3x+2}-2\right|+C$$

例 2 求$\int\frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$的不定积分

解 设$\sqrt{1+x}=t$，则$dx=2tdt$

于是$\int\frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}=\int\frac{2tdt}{t^3+t}=2\int\frac{dt}{1+t^2}$

$$=2\mathrm{arctg}t+C=2\mathrm{arctg}\sqrt{1+x}+C$$

例 3 求$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1}$的不定积分

解 设 $\sqrt[4]{x}=t$，则$dx=4t^3dt$

于是$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx=\int\frac{t^2\cdot 4t^3dt}{t^3+1}=4\int t^2dt-4\int\frac{t^2dt}{t^3+1}$

$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln|t^3+1|+C$$

$$=\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}-\ln|x^{\frac{3}{4}}+1|\right]+C$$

例 4 求$\int\frac{dx}{x-\sqrt{3x+2}}$的不定积分

解 令 $3x+2=u^2$，则 $x=\frac{u^2-2}{3}$，$dx=\frac{2}{3}udu$

于是$\int\frac{dx}{x-\sqrt{3x+2}}=\frac{\frac{2}{3}udu}{\frac{u^2-2}{3}-u}=\int\frac{2udu}{u^2-3u-2}$

$$=\int\frac{(2u-3)du}{u^2-3u-2}+\int\frac{3du}{\left(u-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}$$

$$=\ln|u^2-3u-2|+\frac{3}{\sqrt{17}}\ln\left|\frac{u-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}}{u-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}}\right|+C_1$$

$$=\ln|x-\sqrt{3x+2}|+\ln3$$

$$+\frac{3}{\sqrt{17}}\ln\left|\frac{2\sqrt{3x+2}-3-\sqrt{17}}{2\sqrt{3x+2}-3+\sqrt{17}}\right|+C_1$$

$$=\ln|x-\sqrt{3x+2}|$$

$$+\frac{3}{\sqrt{17}}\ln\left|\frac{2\sqrt{3x+2}-3-\sqrt{17}}{2\sqrt{3x+2}-3+\sqrt{17}}\right|+C$$

（二）$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+h}},\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)dx$型

取 t 为m、n 的最小公倍数；然后设

$$u^t=\frac{ax+b}{cx+h}，\text{即可积。}$$

例 5 求$\int\frac{xdx}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}$的不定积分

解 因 6 为 2， 3 的最小公倍数，

故令 $x+3=u^6$， $x=u^6-3$， $dx=6u^5du$

$$\text{原式}=\int\frac{(u^6-3)6u^5du}{u^3-u^2}=\int\frac{6u^3(u^6-3)du}{u-1}$$

于是可积。

（三）$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx$型

例如：$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$，$\int\frac{ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

等是。

今设$b^2-4ac\neq 0$，即方程式$ax^2+bx+c=0$没有重根的情况。

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

令 $$x+\frac{b}{2a}=t,\quad \frac{b^2-4ac}{4a^2}=\mp A^2$$

所以 $$ax^2+bx+c=a(t^2\pm A^2)$$

今分别讨论如何使被积表达式有理化。

（1）$a>0$

① $b^2-4ac>0$，令$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=A^2$，$x+\dfrac{b}{2a}=t$，

$$dx=dt$$

于是 $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$
$$=\int R\left(t-\frac{b}{2a},\sqrt{a}\sqrt{t^2-A^2}\right)dt$$

再令$t=A\sec u$，即可将被积表达式化为三角函数的有理式，于是可积。

② $b^2-4ac<0$，令$\dfrac{b^2-4ac}{4a}=-A^2$，$x=t-\dfrac{b}{2a}$，

$$dx=dt$$

故 $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$
$$=\int R\left(t-\frac{b}{2a},\sqrt{a}\sqrt{t^2+A^2}\right)dt$$

再令$t=A\operatorname{tg}u$，即可将被积式化为三角函数的有理式，于是可积。

（2）$a<0$，因在$\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]}$中要求根号内是正数，故只有当

$$b^2-4ac>0$$

才有可能（因若$b^2-4ac<0$时，根号内的方括号内为正，而$a<0$，则整个根号内的式子就要小于零，而不可能开方）。

因此设 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=A^2$，又$-a>0$

所以 $ax^2+bx+c=a(t^2-A^2)=-a(A^2-t^2)$

故

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

$$=\int R\left(t-\frac{b}{2a},\ \sqrt{-a}\sqrt{A^2-t^2}\right)dt$$

令 $t=A\sin u$，即化为三角函数有理式，于是可积。

例 6 求$\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-9x+6}}$的不定积分

解 原式$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}，\ 令\ x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sec u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sec u\,du=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sec u+\mathrm{tg}\,u|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}|+C$$

例 7 求$\int\frac{dx}{\sqrt{9x-3x^2-6}}$的不定积分

解

$$原式=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{-2+\frac{9}{4}-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}\quad\left(令\ x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sin u\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int du=\frac{1}{\sqrt{3}}u+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(2x-3)+C$$

下面我们通过例子，再来介绍一种颇为有用的置换——倒置换。

例 8 求$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$的不定积分

解 作置换 $x=\frac{1}{z}$，则 $dx=-\frac{dz}{z^2}$

由此得

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx=\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{z^2}}\cdot\left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{\frac{1}{z^4}}$$

$$=-\int z(a^2z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$$

$$=-\frac{(a^2z^2-1)^{3/2}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3a^2x^3}+C$$

例 9 求$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$的不定积分

解 作置换 $x=\frac{1}{z}$，则 $dx=-\frac{dz}{z^2}$

由此得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=-\int\frac{\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{3}{z^2}-\frac{2}{z}-1}}$$

$$=-\int\frac{\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z^2}\sqrt{3-2z-z^2}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{4-(z+1)^2}}$$

$$=-\arcsin\frac{z+1}{2}+C$$

$$=-\arcsin\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{2}\right)+C$$

$$=-\arcsin\left(\frac{1+x}{2x}\right)+C$$

习　题　13-8

（1）运用置换法求出下列各不定积分

1）$\int\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$；　　2）$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；

3）$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$；　　4）$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$；

5）$\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$；　　6）$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$；

7）$\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$；

8) $\int \frac{x dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}$;

9) $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})dx$;   10) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}}$。

答：

1) $\ln\frac{|x|}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$;

2) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$;

3) $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+3\ln|1+\sqrt[3]{1+x}|+C$;

4) $\frac{2}{a}[\sqrt{ax+b}-m\ln|\sqrt{ax+b}+m|]+C$;

5) $C-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}$

$-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|$

$+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|$;

6) $C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$;

7) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$;

8) $6\left[\frac{1}{9}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}\right.$

$\left.-\frac{1}{6}(x+1)+\frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}-\frac{1}{4}(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+C$;

9) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}$

$+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C$;

10）$\frac{1}{6}(x^2-1)\sqrt{1+2x^2}+C$。

（2）运用倒置换法求出下列各积分

1）$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$；　　2）$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}$；

3）$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；　　4）$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$。

答：1）$\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$；

2）$\ln\frac{Cx}{2+2+2\sqrt{1+x+x^2}}$；

3）$-\arcsin\frac{1}{x}+C$；

4）$\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}}+C$。

（3）自行选择适当的方法，求出下列各式的积分

1）$\int e^{e^x+x}dx$；　　2）$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$；

3）$\int\frac{dx}{x\ln^2x}$；　　4）$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$；

5）$\int e^{2x^2+\ln x}dx$；　　6）$\int\frac{x^4dx}{x^2+1}$；

7）$\int x^2e^{ax}dx$；　　8）$\int\frac{dx}{1+x+2x^2}$；

9）$\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$；　　10）$\int\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}dx$；

11）$\int e^x\sqrt{e^x+a}\,dx$；　　12）$\int\frac{2xdx}{\sqrt{3-4x}}$；

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; 14) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$;

15) $\int \frac{\cos^4 x+\sin^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx$; 16*) $\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x}$;

17) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}}dx$; 18*) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$;

19*) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{dx}{x}$;

20*) $\int x\ln(1+x^3)dx$;

21) $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx$;

22) $\int x^2 e^x \cos x dx$;

23*) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}dx$;

24*) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

25*) $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$;

26) $\int e^{\sin x}\,\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$;

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$;

28) $\int \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}dx$;

29) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\sin^2 x-\sin^2 \alpha}}$;

30*） $\int \frac{e^{c\arctan x}dx}{(1+x^2)^{3/2}}$；

31*） $\int \sqrt{x+\sqrt{x}}\,dx$；

32*） $\int (\ln x)^m dx$ （m为正整数）；

33*） $\int x^{p-1}(\ln x)^q dx$ （$p \neq 0$，q为正整数）；

34） $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$；

35*） $\int \left(\frac{x^2+1}{(x-1)^3}\right)^2 dx$；

36*） $\int \frac{dx}{1+x^4}$；

37*） $\int \frac{x^2}{1+x^4}dx$；

38*） $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}dx$；

39*） $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$；

40*） $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$；

41） $\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$；

42） $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$。

答：

1） $e^{e^x}+C$；

2) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$;

3) $-\frac{1}{\ln x}+C$;

4) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$;

5) $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$;

6) $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$;

7) $\frac{e^{ax}}{a}\left(x^2-\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}\right)+C$;

8) $\frac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{7}}{7}\left(x+\frac{1}{4}\right)+C$;

9) $\ln(e^x+e^{-x})+C$;

10) $-\frac{\sqrt{x+1}}{x}-\ln(\sqrt{x+1}+1)+\frac{1}{2}\ln|x|+C$;

11) $\frac{2}{3}\sqrt{(e^x+a)^3}+C$;

12) 提示：设$3-4x=u^2$;

答：$-\frac{1}{6}(2x+3)\sqrt{3-4x}+C$;

13) 提示：设$1-x^2=u^2$;

答：$\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$;

14) $\sqrt{1-x^2}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$;

15) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C$;

16）①$a^2<b^2$则为$\frac{1}{b^2\cdot\sin 2\alpha}\ln\left|\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\alpha+x)}\right|+C$，

此处$\alpha=\arccos\frac{a}{b}$；

②如$a^2>b^2$，则为$\frac{1}{a^2\sin\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sin\alpha}+C$，

其中　$\alpha=\arccos\frac{b}{a}$；

17）$\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+C$；

18）$\ln\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2u^2}{\sqrt{3}}+C$，

其中　$u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$；

19）$3[\ln|u|-\ln(1+\sqrt{1-u^2})-\arcsin u]+C$，

其中　$u=\sqrt[3]{x}$；

20）$\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^3)-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}\ln(x^2-x+1)$

$-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$；

21）$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln|x|}{\sqrt{x^2-1}}+C$；

22）$\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x]+C$；

23）$x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$；

24）提示：其中分子、分母都用x^2除之，再用

$x+\frac{1}{x}=z$置换；

答：$\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}\,x}{x^2+1}+C$；

25） $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C$；

26） $e^{\sin x}(x-\sec x)+C$；

27） 提示：令$x^n=\frac{1}{u^2}$，$nx^{n-1}dx=-\frac{2du}{u^3}$，

原式$=-\frac{2}{n}\int\frac{udu}{u^3x^{n-1}\cdot x\sqrt{1-u^2}}=\frac{2}{n}\arccos\frac{1}{\sqrt{x^n}}+C$；

28） $\int\frac{d\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2x})+C$；

29） $-\int\frac{d\cos x}{\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2x}}$，令$t=\frac{\cos x}{\cos\alpha}$；

原式$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arccos\left(\frac{\cos x}{\cos\alpha}\right)+C$；

30） 令$\mathrm{arctg}x=u$；

原式$=\int e^{cu}\cos u\,du=e^{cu}\sin u-c\int e^{cu}\sin u\,du$

$$=e^{cu}\sin u+ce^{cu}\cos u-c^2\int e^{cu}\cos u\,du;$$

从而得原式$=\frac{e^{cu}(\sin u+c\cos u)}{1+c^2}+C$

因为 $x=\mathrm{tg}u$，所以$\cos u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

$\sin u=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，乃有

原式$=\dfrac{e^{c\,\mathrm{arctg}x}(c+x)}{(1+c^2)\sqrt{1+x^2}}+C$；

31） 令$x=u^2$；

原式$= 2\int\sqrt{u+u^2}\,udu$

$$=2\int\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\left(u+\frac{1}{2}\right)du$$

$$-\int\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,du;$$

再令$u+\dfrac{1}{2}=v$，就得到

原式$=2\int\sqrt{v^2-\dfrac{1}{4}}\,vdv-\int\sqrt{v^2-\dfrac{1}{4}}\,dv$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{12}(4\sqrt{x}+3)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)+C;$$

32） 令$\ln x=u$，

原式$=\int u^m e^u du=e^u u^m-m\int e^u u^{m-1}du$

$=e^u u^m-me^u u^{m-1}+m(m-1)\int e^u u^{m-2}du$，等等；

原式$=C+x[(\ln x)^m-m(\ln x)^{m-1}$

$+m(m-1)(\ln x)^{m-2}+\cdots+(-1)^m m!\ ]$；

33） 令$\ln x=u$；

$$\text{原式}=\int u^q e^{pu}du=\frac{e^{pu}u^q}{p}-\frac{1}{p}\int e^{pu}qu^{q-1}du+C\text{等等；}$$

最后 $$\text{原式}=\frac{x^p q!}{p^{q+1}}\left(\frac{(p\ln x)^q}{q!}-\frac{(p\ln x)^{q-1}}{(q-1)!}\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^q\right)+C；$$

34） $\ln x[\ln(\ln x)-1]+C$；

35）令$x-1=u$，$x^2+1=u^2+2u+2$，$dx=du$；

$$\text{原式}=\int\frac{(u^2+2u+2)^2}{u^6}du$$

$$=C-\left(\frac{1}{u}+\frac{2}{u^2}+\frac{8}{3u^3}+\frac{2}{u^4}+\frac{4}{5u^5}\right)$$

$$=C-\frac{15u^4+30u^3+40u^2+30u+12}{15u^5}$$

$$=C-\frac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{15(x-1)^5}；$$

36） 提示：$1+x^4=1+x^4+2x^2-2x^2$

$$=(1+x^2)^2-2x^2$$

$$=(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)；$$

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,x}{1+\sqrt{2}x+x^2}dx+\int\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\,x}{1-\sqrt{2}x+x^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\int\frac{2\sqrt{2}+2x}{1+\sqrt{2}x+x^2}dx\right.$$

$$\left.+\int\frac{2\sqrt{2}-2x}{1-\sqrt{2}x+x^2}dx\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\int\left(\frac{\sqrt{2}+2x}{1+\sqrt{2}x+x^2}-\frac{-\sqrt{2}+2x}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)dx\right.$$

$$+\int\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)dx\quad\Bigg]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\Bigg[\ln\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

$$+\sqrt{2}\left(\int\frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right.$$

$$\left.+\int\frac{dx}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)\Bigg];$$

如果令

$$x+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,u \text{ 就有:}$$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{2}x+x^2}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1);$$

$$\int\frac{dx}{1-\sqrt{2}x+x^2}=\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1);$$

应用公式

$$\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$

就得到结果:

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)+C;$$

37） 原式 $=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(-\int\frac{2x}{1+\sqrt{2}x+x^2}dx\right.$

$$\left.+\int\frac{2x}{1-\sqrt{2}x+x^2}dx\right);$$

在分式的分子上加减$\sqrt{2}$，经过一些变形以后积分，就可以写成下面的形状:

$$\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\ln\frac{1-\sqrt{2}x+x^2}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\sqrt{2}\int\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right)dx\right]$$

最后得$\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln\frac{1-\sqrt{2}x+x^2}{1+\sqrt{2}x+x^2}+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)+C$；

38）、39）利用36）与37）的结果就分别得到：

$$\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}+C,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}+C;$$

40） 令$\operatorname{tg}x=y^2$， 就有$dx=\frac{2ydy}{1+y^4}$

原式$=\int\frac{2y^2dy}{1+y^4}$应用37）题的结果

原式$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\frac{1-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x}\right.$

$$\left.+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln\frac{(1-\sqrt{2\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x)^2}{1+\operatorname{tg}^2x}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln(\sin x-\sqrt{\sin 2x}+\cos x)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos x-\sin x}\right)\right]+C;$$

41） $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}+C$；

42） $\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-1}{\sqrt{x^2+2x+4}+1}$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2(x^2+2x+4)}}{x+1}+C。$$

§8 其他积分方法

关于积分技巧讲到这里暂告一段落，下面讲几种特殊的换元方法，作为选读。

（一）尤拉代换法

关于$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$型函数的积分法，我们在前节中已讨论过，现在我们再介绍一种著名的尤拉代换方法：因为这种形式的特点是有理运算R中的一个元素为$\sqrt{ax^2+bx+c}$。其中假定二次三项式没有等根，所以它不能直接化为有理形式。由于二次三项式的不同，可有三种不同的替换方法：

（1）第一种尤拉替换

如果二次三项式ax^2+bx+c有二不同的实根α与β，此时二次三项式可分解成线性因式：

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

当$x>\alpha$的情况下有：

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}$$

从而 $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})=R^*\left(x,\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}\right)$

所以，只要作变换

$$\sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}=t$$

就能把R^*有理化，因而也就将R有理化了。

例 1 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$（$a$为实数，且$x>a$）的不定积分

解 因$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$，其二根为a，$-a$。

令 $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}=t$，则$x=\dfrac{a(t^2+1)}{t^2-1}$， $dx=\dfrac{-4at}{(t^2-1)^2}dt$

而
$$x-a=\frac{2a}{t^2-1}$$

故
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}}=-\int\frac{2}{t^2-1}dt$$

$$=\int\frac{dt}{t+1}-\int\frac{dt}{t-1}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}+1}{\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}}-1}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

$$\left(C=C_1+\ln\frac{1}{|a|}\right)$$

如果把这一结果当作一个公式记住，那么作题就更方便了。例如求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+21}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2-2^2}}$$

此时$a=2$，并可把（$x+5$）看成一个变量，则由公式立即得：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+10x+21}}=\ln\left|(x+5)+\sqrt{(x+5)^2-2^2}\right|+C$$

$$=\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+21}\right|+C。$$

例 2 求$\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$的不定积分

解 因$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x+1)(x-1)}=(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

所以 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

式中被积函数

$$\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} \text{相当于} R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$$

$$\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \text{相当于} R^*\left(x, \sqrt{\frac{a(\alpha-\beta)}{x-\alpha}}\right)$$

现在令 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 即 $\frac{x+1}{x-1} = t^2$, $\therefore x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$

$$x^2-1 = \left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^2 - 1 = \frac{4t^2}{(t^2-1)^2}, \quad dx = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt$$

所以 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

$$= \int \frac{(t^2-1)^2}{4t^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2}dt$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C$$

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

如二次三项式有两个不同的实根 α 与 β，也可用另一个方法作替换

令 $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ [或$t(x-\beta)$]

因 $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$，所以两边平方，约去公因子 $(x-\alpha)$，就得到:

$$a(x-\beta) = t^2(x-\alpha)$$

于是，$x = \frac{-a\beta+\alpha t^2}{t^2-a}$，$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\alpha-\beta)t}{t^2-a}$

$$dx = \frac{2a(\beta-\alpha)t}{(t^2-a)^2}dt$$

于是$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$就有理化了。

例 3 求$\int\frac{xdx}{\sqrt{3x-2-x^2}}$的不定积分

因为$3x-2-x^2=(2-x)(x-1)$，有两个实根 1， 2

令$\sqrt{3x-2-x^2}=\sqrt{(2-x)(x-1)}=t(x-1)$

$$\therefore \quad x=\frac{2+t^2}{1+t^2}, \quad dx=\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$$

由此
$$\int\frac{x}{\sqrt{3x-2-x^2}}dx=-2\int\frac{2+t^2}{(1+t^2)^2}dt$$
$$=-2\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}-2\int\frac{dt}{1+t^2}$$
$$=-\frac{t}{1+t^2}-\text{arctg}t-2\text{arctg}t+C$$
$$=-\frac{t}{1+t^2}-3\text{arctg}t+C$$

因之，
$$\int\frac{x}{\sqrt{3x-2-x^2}}dx=-\sqrt{3x-2-x^2}$$
$$-3\text{arctg}\frac{\sqrt{3x-2-x^2}}{x-1}+C$$

（2）第二种尤拉替换

如果二次三项式的常数项$c>0$，可设

$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$

（也可设$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$）

平方后，消去c，并约去因子x，得：

$$ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\,t$$

由此，$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$，代入上式得：

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}$$

$$dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt$$

于是可将$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$有理化

当求得了原函数之后，再令$t=\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$

代回去，即可得$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$的原函数。

例 4 求$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}$的不定积分

解 因$c=2>0$，故可设$\sqrt{2+3x-x^2}=xt+\sqrt{2}$

于是$x=\dfrac{3-2\sqrt{2}t}{1+t^2}$，$dx=-2\dfrac{\sqrt{2}+3t-\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2}dt$

代入原式得 $$\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-x^2}}=-2\int\frac{\sqrt{2}+3t-\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2(xt+\sqrt{2})}dt$$

$$=-2\int\frac{\sqrt{2}+3t-\sqrt{2}t^2}{(1+t^2)^2\left[\dfrac{3t-2\sqrt{2}t^2+\sqrt{2}+\sqrt{2}t^2}{1+t^2}\right]}dt$$

$$=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\mathrm{arctg}t$$

再将$t=\dfrac{\sqrt{2+3x-x^2}-\sqrt{2}}{x}$代回，得：

原式$=-2\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2+3x-x^2}-\sqrt{2}}{x}\right)+C$

例 5 求$\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$的不定积分

解 因$c=1>0$

故可设 $\sqrt{x^2-x+1}=xt-1$

所以 $x=\dfrac{2t-1}{t^2-1}$，$dx=-2\dfrac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt$

$\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t^2-t+1}{t^2-1}$，$x+\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{t}{t-1}$，

则 $$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt$$

$$=\int\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1}-\frac{3}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\frac{3}{t+1}+2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C$$

因 $t=\frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$

得 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1}$

$$+2\ln|\sqrt{x^2-x+1}+1|-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}-x+1|$$

$$-\frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2-x+1}+x+1|+C。$$

（3）第三种尤拉替换

如果二次三项式：ax^2+bx+c的平方项的系数$a>0$，可设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$（或$t+\sqrt{a}\,x$）

等式两端平方，消去 ax^2 项，得：

$$bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$$

于是 $x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}$

$$dx=2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt$$

因此$R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$即有理化了。

例 6 求$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$的不定积分（此处 a 是常数）

因x^2项的系数是$1>0$，故可设

$$\sqrt{x^2+a^2}=t-x$$

由计算得$x=\frac{t^2-a^2}{2t}$，　$dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$

$\sqrt{x^2+a^2}=\frac{t^2+a^2}{2t}$，$t=x+\sqrt{x^2+a^2}$

则 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{(t^2+a^2)2t}{2t^2(t^2+a^2)}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$

因得：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

在很多的情况下，可把求某一个函数的原函数问题，化简为求$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$型的原函数。所以如果能把例 6 的结果当作公式记住，在作题时是很方便的。

例如，求$\int \frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}}$的不定积分

解

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-6x+x^2+2}}$$

$$= \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{2})^2}}$$

把（ x － 3 ）看作变量，利用例 6 的结果

$$\text{原式} = \ln\left|(x-3)+\sqrt{(x-3)^2+(\sqrt{2})^2}\right|+C$$

$$= \ln\left|x-3+\sqrt{11-6x+x^2}\right|+C$$

又如，求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$的不定积分

解 可把原式化为：

$$\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$代入例 6 的公式中得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C$$

但此题中，因$C = 1 > 0$，若考虑用第三种尤拉变换则有

$$\sqrt{x^2+x+1} = t + x,$$

计算得：$x = \frac{t^2-1}{1-2t}$，　$dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(1-2t)^2}dt$，

$$t = \sqrt{x^2+x+1} - x,$$

于是得：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{1-2t}+t} \cdot \frac{-2(t^2-t+1)}{(1-2t)^2} dt$

$$= -\int -\frac{-2dt}{1-2t} = \ln\left|\frac{1}{1-2t}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{1}{1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C_1$$

但 $\left|\frac{1}{(1+2x)-2\sqrt{x^2+x+1}} \cdot \frac{(1+2x)+2\sqrt{x^2+x+1}}{(1+2x)+2\sqrt{x^2+x-1}}\right|$

$$= \left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{-3}\right|$$

$$= \frac{2}{3}\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$$

因得 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \ln\frac{2}{3}\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C_1$

$$= \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C_1 + \ln\frac{2}{3}$$

$$= \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$$

此处 $C = C_1 + \ln\frac{2}{3}$，可见计算上是较繁的。

习 题 13-9

（1）利用例1与例6的结果计算下列各不定积分。

1） $\int \frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}}$；　　2） $\int \frac{2dx}{\sqrt{5x^2+2}}$；

3） $\int \frac{dx}{\sqrt{7x+4x^2}}$；　　4） $\int \frac{3x+2}{\sqrt{19-5x+x^2}} dx$。

答：1） $\ln|x-3+\sqrt{11-6x+x^2}|+C$；

2） $\frac{2}{\sqrt{5}}\ln|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+2}|+C$；

3）$\frac{1}{2}\ln\left| x+\frac{7}{8}+\sqrt{x^2+\frac{7}{4}x}\right|+C$；

4）$3\sqrt{19-5x+x^2}$

$$+\frac{19}{2}\ln\left| x-\frac{5}{2}+\sqrt{19-5x+x^2}\right|+C。$$

（2）利用尤拉替换求下列各不定积分：

1）$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$；　　2）$\int\frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$；

3）$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$；　4）$\int\sqrt{4x^2-2x+1}\,dx$。

答：1）$2\operatorname{arctg}(x+\sqrt{x^2+2x-1})+C$；

2）$-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-2x^2+5x-2}}{\sqrt{2}(x-2)}+C$；

3）$-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C$；

4）提示：$\sqrt{4x^2-2x+1}=xt+1$；

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}-1+2x}{\sqrt{4x^2-2x+1}-1-2x}\right|+C。$$

（二）二项型微分式的积分法

形如$x^\alpha(a+bx^\beta)^\gamma dx$称为一个二项型的微分式，其中的指数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$都是有理数。$a$与$b$均为实数，且都不等于零。

二项型微分式的积分并不是经常“可求积的”（可用初等函数有限形式表达出来），只有当下面三种情况它才能积出来。

（1）γ是整数（正的、负的或零）

（2）$\frac{\alpha+1}{\beta}$是整数（正的、负的或零）

（3）$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$是整数（正的、负的或零）

这三个条件叫做二项型微分式的“可积性”条件，它不但是充分条件，并且还是必要条件，也就是说，除此三个条件外，二项型的微分式的原函数不可能用初等函数有限形式表达出来。

设 $I=\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx$

令 $x^{\beta}=t$，于是 $x=t^{\frac{1}{\beta}}$，$dx=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt$

因此，$I=\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(a+bt)^{\gamma}dt$

（1）当 γ 是整数，今设 $\gamma=m$，$\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{p}{q}$，其中 p，q 都是整数，且 $q>0$，则

$$I=\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{p}{q}-1}(a+bt)^{m}dt=\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{p-q}{q}}(a+bt)^{m}dt$$

再令 $t=u^{q}$，$dt=qu^{q-1}du$

则 $$I=\frac{1}{\beta}\int u^{p-q}(a+bu^{q})^{m}qu^{q-1}du$$

$$=\frac{q}{\beta}\int u^{p-1}(a+bu^{q})^{m}du，$$ 于是可积

故做替换 $u^{q}=x$，q 为 α，β 二分式的分母的最小公倍，就可以把二项型微分式有理化。

例 1 计算 $\int x^{\frac{1}{2}}(1+2x^{\frac{1}{3}})^{2}dx$

解 此时 $\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{3}$，$\gamma=2$，$q=6$ 故可设

$$u^{6}=x, dx=6u^{5}du$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{3}}\right)^{2}dx=\int u^{3}(1+2u^{2})^{2}6u^{5}du$$ （下略）。

（2）$\frac{\alpha+1}{\beta}$ 是整数时，设 $\frac{\alpha+1}{\beta}=m$，而设 $\gamma=\frac{p}{q}$ 其中 p，q 都是整数，且 $q>0$，则

$$I=\frac{1}{\beta}\int t^{m-1}(a+bt)^{\frac{p}{q}}dt$$

再令 $a+bt=u^q$， 则 $t=\dfrac{u^q-a}{b}$，$dt=\dfrac{q}{b}u^{q-1}du$

所以 $I=\dfrac{1}{\beta}\int\left(\dfrac{u^q-a}{b}\right)^{m-1}\cdot u^p\cdot\dfrac{q}{b}u^{q-1}du$

$=\dfrac{q}{\beta b^m}\int(u^q-a)^{m-1}\cdot u^{p+q-1}du$，于是可积。

所以作替换$u^q=a+bx^\beta$即可把二项型的积分式有理化。

例 2 计算$\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$

解 此时$\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\beta=\dfrac{1}{4}$，$\gamma=\dfrac{1}{3}$，$q=3$（q 为 γ 的分母）

因为 $\dfrac{\alpha+1}{\beta}=\dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2$ 是整数，故设

$u=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$， $x=(u^3-1)^4$， $dx=12u^2(u^3-1)^3du$

$I=\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int(u^6-u^3)du$ （下略）。

例 3 计算$\int\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int x^{-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$

解 $\alpha=-1$， $\beta=2$， $\gamma=\dfrac{1}{2}$， $q=2$

$\dfrac{\alpha+1}{\beta}=\dfrac{-1+1}{2}=0$ 是整数，故可令

$u=\sqrt{1+x^2}$，因此 $1+x^2=u^2$， $xdx=udu$

于是 $\int\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

$=\int\dfrac{u^2}{u^2-1}du$（下略）。

例 4 计算$\int\sqrt{x}\sqrt[4]{1-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}dx$

解　$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=-\frac{3}{2}$，$\gamma=\frac{1}{4}$，$q=4$

$$\frac{\alpha+1}{\beta}=\frac{\frac{1}{2}+1}{-\frac{3}{2}}=-1$$是整数，故可令

$$u=\sqrt[4]{1-x^{-\frac{3}{2}}}\,,\quad x=(1-u^4)^{-\frac{2}{3}},$$

$$dx=\frac{8}{3}(1-u^4)^{-\frac{5}{3}}u^3du$$

所以　$$\int\sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}\,dx=\frac{8}{3}\int\frac{u^4}{(1-u^4)^2}du$$（下略）。

（3）　如果$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$是整数（此处$\gamma$不是整数）

因$I=\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma-1}\cdot\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\gamma}dt$

今假设$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=m$（$m$为整数），并设$\gamma=\frac{p}{q}$，$p$，$q$都是整数，且$q>0$

于是$I=\frac{1}{\beta}\int t^{m-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{p}{q}}dt$

故若设$\frac{a+bt}{t}=u^q$，$t=\frac{a}{u^q-b}$，$dt=-\frac{qt^2}{a}u^{q-1}du$

因得　$$I=\frac{1}{\beta}\int t^{m-1}u^p\left(-\frac{qt^2}{a}u^{q-1}\right)du$$

$$=-\frac{q}{a\beta}\int t^{m+1}u^{p+q+1}du$$

$$=-\frac{q}{a\beta}\int\left(\frac{a}{u^q-b}\right)^{m+1}u^{p+q-1}du$$

$$=-\frac{qa^m}{\beta}\int\frac{u^{p+q-1}}{(u^q-b)^{m+1}}du$$，于是可积。

故若$\gamma=\frac{p}{q}$，作替换$u=\sqrt[q]{ax^{-\beta}+b}$就能把二项型微分式有理化。

例 5 计算$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

解 可将它写成$\int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx$

此时 $\alpha=0$，$\beta=4$，$\gamma=-\frac{1}{4}$，$q=4$

$$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

故可令 $u=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$，$x=(u^4-1)^{-\frac{1}{4}}$

$dx=-u^3(u^4-1)^{-\frac{5}{4}}du$，$\sqrt[4]{1+x^4}=ux=u(u^4-1)^{-\frac{1}{4}}$

于是 $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{u^2}{u^4-1}du$（下略）。

例 6 计算$\int\frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$

解 原式可写成$\int x^{-2}(2+x^3)^{-\frac{5}{3}}dx$

其中 $\alpha=-2$，$\beta=3$，$\gamma=-\frac{5}{3}$，$q=3$

$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=-\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-2$ 是整数，故可令

$$u=\sqrt[3]{2x^{-3}+1}，\quad x=2^{\frac{1}{3}}(u^3-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$dx=-2^{\frac{1}{3}}(u^3-1)^{-\frac{4}{3}}u^2du$$

而 $2+x^3=2u^3(u^3-1)^{-1}$

于是 $\int\frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}=\int\frac{-2^{\frac{1}{3}}u^2(u^3-1)^{\frac{2}{3}}}{(u-1)^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{(u^3-1)^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}}u^5}du$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{u^3-1}{u^3}du（下略）。$$

习 题 13-10

求下列二项型微分式的不定积分：

1. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$； 2. $\int \frac{x^3dx}{(2+3x^2)^{\frac{5}{2}}}$；

3. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[8]{x})^2}dx$； 4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$；

5. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$；

6. $\int \frac{5dx}{x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$。

答：1） $\frac{1}{15}(3x^2-2)\sqrt{(1+x^2)^3}+C$；

2） $\frac{x^3}{6(2+3x^2)^{\frac{3}{2}}}+C$；

3） $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}$

$-21\,\mathrm{arc\,tg}x^{\frac{1}{6}}+C$；

4） $\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}-\frac{5}{9}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}+C$；

5） $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}$

$+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$，

（此处 $x>0$）

6） $-\frac{5(2x^2+1)}{x\sqrt{1+x^2}}+C$。

从上面几段的讨论知道哪些无理函数可求不定积分，以及怎样去求它。然而原函数能够用初等函数有限形式表示出

来的无理函数，为数不多。例如二项型微分式：

$$x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\gamma}dx,$$

当γ，$\dfrac{\alpha+1}{\beta}$，$\dfrac{\alpha+1}{\beta}+\gamma$不为整数时的原函数以及

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx$$

等等的原函数皆不能用初等函数有限形式表达出来。虽然如此，上述可化为有理函数的积分的几种类型基本已经够用了。

（三）双曲函数积分法

由双曲函数的导数公式，我们可以直接得到下列积分公式

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C;$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C;$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \operatorname{tgh} x + C;$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\operatorname{ctgh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arc}\sinh\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \pm\operatorname{arc}\cosh\frac{x}{a} + C \quad (x^2>a^2);$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\operatorname{tgh}\frac{x}{a} + C \quad (x^2<a^2);$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{-1}{a}\operatorname{arc}\operatorname{ctgh}\frac{x}{a} + C \quad (a^2<x^2)。$$

这里后边四个公式很有用，有了双曲函数对于 $\int R(x,\sqrt{x^2\pm a^2})dx$ 类型的积分，可以考虑用"双曲变换"，如含有：

$\sqrt{x^2+a^2}$ 的情形用 $x=a\sinh u$ 替换。

含有：

$\sqrt{x^2-a^2}$ 的情形用 $x=a\cosh u$ 替换。

例 求 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$ 的不定积分

解 设 $x=a\sinh u$，$du=a\cosh u\,du$，

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\cosh^2u\,du$$

因
$$\cosh^2u=\frac{1}{2}(\cosh 2u+1)。$$

所以有
$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\int(\cosh 2u+1)du$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sinh 2u\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{2}\sinh u\cosh u+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sinh}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+C$$

习 题 13-11

（1）导出下列各积分公式

1） $\int\operatorname{tgh}u\,dx=\ln(\cosh x)+C$；

2） $\int\operatorname{sech}x\,dx=\operatorname{arctgh}(\sinh x)+C$；

3） $\int \operatorname{csch} x dx = -\operatorname{arcctgh}(\cosh x) + C$。

（2）求下列各式的不定积分（限用双曲函数作）

1） $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+26}}$；

2） $\int \sqrt{x^2-6x+14}\, dx$；

3） $\int \frac{dx}{4x^2+12x-7}$；

4） $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$。

答：1） $\operatorname{arc\,sinh} \frac{x-1}{5} + C$；

2） $\frac{1}{2}\Big[(x-3)\sqrt{x^2-6x+14}$

$+ 5\operatorname{arcsinh}\frac{x-3}{\sqrt{5}}\Big] + C$；

3） $-\frac{1}{8} \operatorname{arc\,tgh} \frac{2x+3}{4} + C$；

4） $\pm\operatorname{arccosh}(2x-1) + C$。

最后我们举一个例子作为本节的结束。

例 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$ 中任一个原函数 I

【解 1】 设 $x = 2\sin\theta$；

则
$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\right|。$$

【解 2】 设 $\sqrt{4-x^2} = t$；

则
$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|。$$

【解 3】 设 $x=\frac{1}{t}$；依对数微分法有 $\frac{dx}{x}=-\frac{dt}{t}$，

则 $$I=\mp\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\pm\sqrt{4-x^2}}{2x}\right|。$$

【解 4】 设 $x^2=\frac{1}{t}$；依对数微分法有 $\frac{dx}{x}=-\frac{dt}{2t}$，

则 $$I=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2}\right|。$$

【解 5】 设 $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=t$； $x=\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}$，

$$dx=\frac{8tdt}{(t^2+1)^2}$$

则 $$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right|。$$

【解 6】 设 $\sqrt{4-x^2}=tx$，$x^2=\frac{4}{1+t^2}$；依对数微分法

$$\frac{dx}{x}=\frac{-tdt}{1+t^2},$$

则 $$I=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|。$$

上述 6 种置换方法得出的结果从表面上看是不同的，但彼此之差，只是一个常数而已。

§9 关于积分问题的一些补充说明

从上面的全部讨论过程中明显地看到，求一个函数的原函数并不是一件轻而易举的事情。这就要求我们除了记住基本的积分公式外，还要求对求原函数的各种方法必须很熟练。通过作题和多看一些例题也就能够掌握一些必要的技

巧，只有这样才能迅速而准确地求得原函数。另外在求原函数时往往不是只可运用一种方法，在不同的方法中就应该加以选择，选择的标准是看哪一种方法可以最快地获得结果。例如

$$\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$$

虽然是属于 $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ 的类型，但是如果能先把它化为

$$\int \frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}$$

就立刻得到结果，而比用 $u=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ 去置换来得简单。那么，就当然用前者，而不是后者。

又如 $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$ 可以先写成 $\frac{1}{3}\int \frac{d(1+x^3)}{1+x^3}$

也就立刻得到结果了。那你就不要用部分分式去处理了。由于我们用不同的方法，所得的结果，外表形式可能不一样。但它的中间只相差一个常数是肯定的。如在第三种尤拉替换中例题就是如此。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

如果要验证所得结果是否相同，一种方法是变变看能否变为一样；另一法是把所得到的结果微分一下，看看能否还原为被积式。如果能还原，则所得到结果是对的，不 然 一 定 有错。

我们将在下一章讲到，**如果 $f(x)$ 连续，则它的原函数**

一定存在；因为初等函数在其定义域内为连续，所以**初等函数在它的定义域内，它的原函数就一定存在。**但是必须分清，**原函数存在是一回事，原函数能否用初等函数表示又是另一回事。**事实上的确有这样的初等函数，它的原函数是存在的。但这原函数却不能用初等函数来表示。如果初等函数的原函数不是初等函数，我们就说$\int f(x)dx$不能表为有限形式。例如：

$$\int e^{-x^2}dx、\int\frac{dx}{\ln x}、\int\frac{e^x}{x}dx、\int\frac{\sin x}{x}dx、\int\frac{\cos x}{x}dx、$$

$$\int\sin x^2dx、\int\cos x^2dx、\int\sqrt{x}\sin xdx、\int\sqrt{1+x^3}dx\text{等等。}$$

它们的原函数均存在。但是不能用初等函数表达成有限形式。为了更好地了解这一点，我们不妨用类比的方法来说明。例如我们研究的范围仅限制在代数函数，则对于

$\int\frac{dx}{1+x^2}$、$\int\frac{dx}{x}$等很简单的有理函数的积分，我们就更没法

把它们积出来。为了表示它们，必须超出有理函数的范围而引入超越函数$\ln x$和$\mathrm{arctg}x$。同样的道理，初等函数的原函数也不一定还是初等函数。希读者注意这一问题。

§10 查 表 举 例

学完了不定积分，同时也掌握了一些积分的技巧，现在让我们来谈一谈如何查积分表的问题。在求不定积分方面，前人已经给我们作了大量的工作，我们应当充分地利用它。

下面通过具体问题讲解如何查表。

我们在本册之末附有积分简表，可供我们利用。一般的已足够用了，更详细的表有徐桂芳编译的积分表，表中收集积分公式738个之多。一般的积分大都可以在此表中查到。至此，读者也许会问：既然有表可查，又何必在前边花很大的气力学积分技巧呢？这里有下列几个理由：

首先说，没有一个积分表是完备的；第二，有时一个简单问题不必查表。若掌握了一定的积分技巧，可以很快就解决问题。第三，有时你手头可能没有积分表，可是掌握了积分技巧，并不困难就可以解决。第四，只有当你已有一定的积分能力才能更好地利用积分表，才能编出更完善的积分表。

例 1 求 $\int te^{-\sqrt{t}}dt$ 的积分

解 我们翻阅一下积分表，找不到这样一个公式，但是若先作一个变换：

设 $x^2=t$，$dt=2xdx$

则 $$\int te^{-\sqrt{t}}\,dt = 2\int x^3e^{-x}dx$$

现在对 $\int x^3e^{-x}dx$ 在我们的积分表中，可以查到了。即公式160。

$$\int x^ne^{ax}dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$

此时 $n=3$，$a=-1$

$$\int x^3e^{-x}dx = -x^3e^{-x} + 3\int x^2e^{-x}\,dx$$

对于$\int x^2e^{-x}dx$再用一次这个公式得：

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\ dx$$

对于$\int xe^{-x}dx$最后再用一次这个公式得：

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}$$

因得 $\int x^3e^{-x}dx=-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C_1$

所以 $\int te^{-\sqrt{t}}\ dt=-2e^{-\sqrt{t}}\ (t^{\frac{3}{2}}\ +3t+6t^{\frac{1}{2}}+6)+C$

例 2 求$\int\frac{\cos^2x}{1+\cos^2x}dx$的积分

这个积分在表中也是直接查不到，但若变换一下就可以查到了。

因 $$\frac{\cos^2x}{1+\cos^2x}=1-\frac{1}{1+\cos^2x}$$

又因 $$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$$

所以 $$\frac{1}{1+\cos^2x}=\frac{1}{1+\frac{1+\cos2x}{2}}=\frac{2}{3+\cos2x}$$

故 $$\int\frac{\cos^2x}{1+\cos^2x}dx=\int dx-2\int\frac{dx}{3+\cos2x}$$

对于 $\int\frac{dx}{3+\cos2x}$我们可以在表中查到第130式

$$\int\frac{du}{a+b\cos u}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{a+b}+C$$

此时，其中　$u=2x$，$a=3$，$b=1$

所以　$$\int\frac{\cos^2x}{1+\cos^2x}=x-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}x}{2}+C$$

在公式130中原来有两个结果，我们在使用时要根据具体条件，现在$a=3$，$b=1$，$a^2-b^2>0$，所以我们采用第一个结果。若在相反的情形就应采用第二结果。关于这一点，读者在查表时希能注意。

总　　结

在这一章中，我们主要讲了微分的反运算问题，即原函数求法。这一方法也是由实际问题（§1）所引起的。我们知道一个函数的原函数不止一个，而有无穷个。但是它们之间有着密切关系，即是在它们之间相差一个随意常数。因此这就解决了很大的问题。当我们求一个函数的原函数时，只要能求出这些原函数中任何一个即可。因为它和其它的原函数之差也不过是一个常数而已。

求原函数的方法叫做积分法。积分法在技巧上是比微分法要困难得多。这是因为这两个问题在逻辑上性质的差异。我们回忆一下，求已知函数的导数是很简便的，因为导数的定义是带有“构造性”，导数被直接规定为：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

换句话说，是直接规定为某些确定的运算加到已知函数上的结果。例如，当我们求函数的导数时，我们完全知道如何去着手进行这一工作，以及如何把这一工作进行到底。但是，在原函数的定义中就找不出任何构造性的成分。它没有告诉

我们应该怎样去找原函数，也没有告诉我们应该怎样着手这项工作。因此，积分运算除了有理函数外没有一整套的法则。

本章中所讲的换元积分法、分部积分法、三角函数积分法，以及简单的无理函数积分法，只是解决其中能够解决的那部分，而不敢说对于这类函数的积分已能全部解决。只有对于有理函数积分法和三角函数的有理函数积分法，算是全部解决了。

在本章所介绍的积分法中，以换元法、分部积分法和有理函数积分法为最主要。因为其他方法也都是用这三种方法之一或两者合用。例如在解决一些三角函数积分法时，常用到换元法和分部积分法。三角有理函数积分法是用到换元法和有理函数积分法。

其次，我们要提醒大家注意的是：有理函数积分法针对被积函数式是代数有理式或三角函数有理式。若是三角函数有理式需先进行换元，化为代数有理式。在积分之前，先把代数有理式化为最简分式，然后进行积分。假若被积函数表达式中既含有超越函数，又含有代数式。如

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2(1+x^2)}$$

就不能化为最简分式，这类式子宜用分部积分法解决 $\left[\right.$ 其答案为：$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right)\operatorname{arctg}x+\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+C\left.\right]$。

在本章之末尾，我们曾提到有些函数的原函数是无法写成有尽形式的。但是，通过本章中所介绍的积分方法，也确实有许多常用的函数，它的原函数可以用有尽形式表出。至

若那些不能用有尽形式表示出来的原函数，在应用时可以用近似积分法解决。

第四次测验作业

注意　计算时不准查积分表，但可利用课本所介绍的24个基本积分公式。

求下列各式的不定积分

0-组

1. $\int\left(x+\sqrt{x}+\frac{1}{x^3}+\cos 3x\right)dx$；

2. $\int 2x\ln(x^2+1)dx$；

3. $\int\frac{-3x}{(x-2)(x^2+2)}dx$；　　4. $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

5. $\int\frac{1+\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}+1}dx$；　　6. $\int\frac{dx}{\sin 2x\cos 2x}$。

1-组

1. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sin 3x+x^2e^{x^3+1}\right)dx$；

2. $\int x^2\cos 2x dx$；

3. $\int\frac{x-19}{(x+1)(x^2-2x-3)}dx$；　　4. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$；

5. $\int\frac{x+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx$；　　6. $\int\frac{\cos\theta}{5-3\cos\theta}d\theta$。

2-组

1. $\int\left(\frac{1}{x^3}+\sin 4x+x\sqrt{x^2+1}\right)dx$；

2. $\int 27x^2e^{3x}dx$;

3. $\int \frac{5x^2+1}{(x+1)(x^2+2x+3)}dx$; 4. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$;

5. $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}-1}dx$; 6. $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$。

3-组

1. $\int\left[\frac{1}{x^2}+e^{-x}+x\cos(x^2+1)\right]dx$;

2. $\int 6x^2\cdot\operatorname{arctg}2x\,dx$;

3. $\int \frac{16x^2+x-2}{2x^4+x^3+x^2-x}dx$;

4. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2x-x^2}}dx$; 5. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x(\sqrt[6]{x}+1)}dx$;

6. $\int \sin 0.2x\cos 0.6x\,dx$。

4-组

1. $\int\left[\frac{1}{x^2}+e^{3x}+(2x+1)^7\right]dx$,

2. $\int x^3\cos(x^2+2)dx$;

3. $\int \frac{19x+26}{(2x+1)(2x^2-9x-5)}dx$;

4. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}dx$; 5. $\int \frac{x\sqrt{x+3}}{x+4}dx$;

6. $\int \cos^2x\sin^3x\,dx$。

5-组

1. $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}$; 2. $\int x\operatorname{tg}^2x\,dx$;

3. $\int \frac{(x^2+x-10)dx}{(2x-3)(x^2+4)}$;　　4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

5. $\int \frac{\ln x}{(x-2)^2}dx$;　　6. $\int \frac{\cos\theta}{5-3\cos\theta}d\theta$。

6-组

1. $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2}dx$;　　2. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}dx$;

3. $\int x\ln(x^2+1)dx$;　　4. $\int \frac{x+1}{x^4+4x^2}dx$;

5. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;　　6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$。

7-组

1. $\int \frac{dx}{25x^3-9x}$;　　2. $\int \frac{(1-\sqrt{x})dx}{x+2\sqrt{x}+2}$;

3. $\int \frac{\mathrm{arctg}x}{(1-x)^2}$;　　4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

5. $\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}$;　　6. $\int \frac{dx}{\sin^2x\sqrt{9-\mathrm{ctg}^2x}}$。

8-组

1. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+10}$;　　2. $\int \frac{\sin^4x}{\cos^2x}dx$;

3. $\int \cos\ln x dx$;　　4. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+x}$;

5. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$;　　6. $\int \frac{\cos\theta}{5-3\cos\theta}d\theta$。

9-组

1. $\int \frac{(4x+3)dx}{4x^3+8x^2+3x}$;　　2. $\int x^3e^{x^2}dx$;

3. $\int \frac{dx}{(\cos x+\sin x)^2}$;

4. $\int \frac{(x^2+x-10)dx}{(2x-3)(x^2+4)}$;

5. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-3x+3}}$;

6. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$。

第十四章 定 积 分

［学习指示］ 和导数概念一样，定积分概念也是由实际问题中产生的。我们知道导数概念是由速率、密度等问题产生的；而定积分概念则是由另外一种不同类型的问题所产生，并且两类问题的性质是完全不同的。前者是两个无穷小量比的极限问题；而后者是函数和的极限问题。最后都归结到同一个重要的数学工具——微积分。人们最初对于定积分这一运算工具并不知道它与微分的逆运算——求原函数有什么关系。由于定积分在计算技巧上有一定的困难，因此它虽然由应用出发，但是不能广泛地应用。同时求原函数的运算，虽然在计算上人们创造了不少的方法，但对这一微分逆运算到底有什么应用，人们弄不清楚。直到十七世纪末才开始明白。最后由牛顿-莱布尼兹把它们密切联系起来，于是积分学也就有了广泛的应用。

积分的运算是数学分析中两大基本运算（微分与积分）之一。它不仅在理论上有很大的价值，就是在实用上也极为广泛（如几何学、物理学、力学等）。积分的概念已经渗透在很多的科学领域之中。因此，积分学是数学分析与客观实际相联系最密切的一部分。本章主要内容有下列几点：

1.定积分概念；

2.定积分与不定积分的关系；

3.定积分的近似计算；

4.广义积分。

其中1、2属于概念性的；3、4是计算方面的。学完这一章后，要求能正确的使用定积分的换元法和分部积分法；会用抛物线法作定积分的近似计算；会判断简单的广义积分的敛、散性。

§1 定积分概念

（一）引出定积分的具体问题

例 1 计算曲边梯形的面积

在初等几何学中，我们仅仅会计算由直线或圆弧所围成的平面图形的面积。但是如何计算任意形状的曲线所围成的面积？那时还未讲到，现在我们就来讨论这一问题。

任意曲线所围成的图形，常常可以用两组互相垂直的直线分成若干部分（图14-1），其中一些是矩形。它的面积我们已经会计算，而不是矩形的各部分，是由三条直线，其中有两条平行，第三条与前两条垂直，而第四条是曲线。由这些直线与曲线所围成的图形，我们称它们为**曲边梯形**（图14

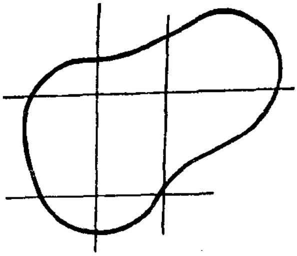


图 14-1

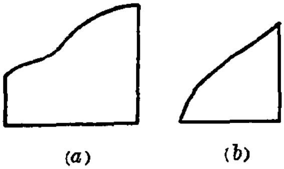


图 14-2

-2a),(图14-2b)是图(14-2a)的特殊情况,也称为曲边梯形。于是,研究任意曲线所围成的面积问题就化为求曲边梯形的面积问题了。

今有一曲线,它的方程是$y=f(x)$,设$f(x)\geqslant 0$(即曲线在x轴上方),如图 14-3,在$[a, b]$区间上,对应着一个曲边梯形 $AMNB$,它是由曲线$y=f(x)$,直线$x=a$,$x=b$及 Ox 轴围成。

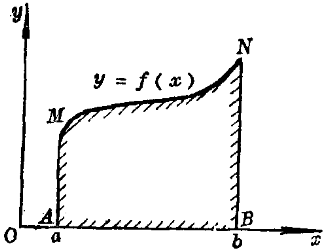


图 14-3

现在,要计算这个曲边梯形的面积。这里遇到了一个曲边梯形面积的概念。我们从初等几何中已经知道矩形面积可以用长和宽的乘积这个数量来度量。可是对于曲边梯形来说,高度是变化的,那么如何度量曲边梯形的面积呢?如果我们把 $y=f(x)$的最小值取为曲边梯形的高所成的矩形(图 14-4a)来近似表示原来曲边梯形的面积。这显然是不妥当。因为当其底不太小而曲边的摆动又很大时,这个矩形的面积是太小了;同样若取$y=f(x)$的最大值作为矩形的高所

得面积来表示曲边梯形面积的近似值，又未免太大了（图14-4b）；若随便取$y=f(x)$在$[a、b]$上的一个值作为高呢？这又毫无标准(即可能取的太大，也可能太小)（图14-4c)。

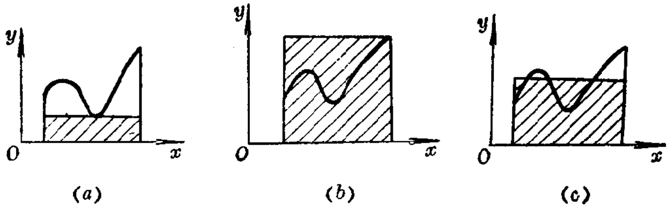
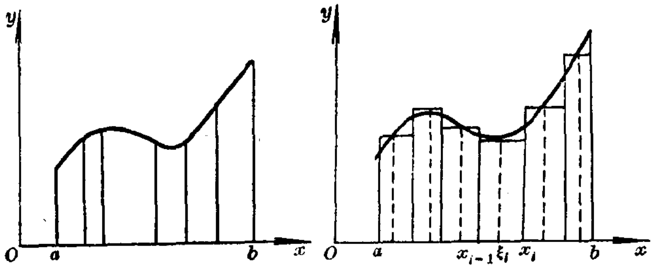


图 14-4

那么，怎样来考虑呢？我们可以回忆一下在初等几何学中，对圆面积的求法：

当时是先考虑圆内接正多边形的面积，然后将边数逐步加多，当边数无限制地增加时，这个正多边形的面积也就无限的接近圆的面积了。但是在这里，我们所要讨论的问题是曲边梯形的面积，而不是圆的面积。因此关于求圆面积的方法不能直接应用；但是，这种取极限的概念，仍可利用。如果曲边梯形的底比较窄时，一般地讲来，它的曲边也不会变动太大。因此就可以把曲边梯形近似地看为矩形。所以若把原曲边梯形分为许多窄条形状的曲边梯形（图14-5a），此时若在小长条上作一小矩形，这小矩形的面积就可近似的等于小曲边梯形的面积。这时比底宽的情形用矩形面积来代替曲边梯形误差小得多。如此组成一个台阶式的面积（图14-5b），它与曲边梯形面积之差也就比用一个大矩形面积来近似表示原曲边梯形好的多。

今设在区间$[a, b]$上的分点为：



(a)　　　　　　　　(b)

图 14-5

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

把原曲边梯形分为n个窄条形状的小曲边梯形，为了一致起见，我们令$a=x_0$，$b=x_n$，于是有：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

由这些分点把区间[a、b]分为小区间[x_{i-1}，x_i]，（$i=1$，2，3，…，n），我们把这些小区间称为子区间，并记它们的长度为$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$，一般地讲来，它们彼此不一定相等。这些分点的x_i（$i=1$，2，3，…，n）的全体，有时又称为区间[a、b]的一个“分法”。

在任意的一个小区间[x_{i-1}，x_i]上任取一点ξ_i，当然点ξ_i可以在区间的内部，也可以与某一端点重合（$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$），在点$\xi_i$上树立起与$Ox$轴的垂直的直线。让它延长与曲线$y=f(x)$相交于$M$点，则由$M$点到$x$轴垂线的长度即等于$f(\xi_i)$，通过点$M$作平行于$Ox$轴的直线，到它与直线$x=x_{i-1}$，$x=x_i$相遇为止。于是得一小矩形，如图14-6中的阴影部分。设此小曲边梯形的面积为ΔS_i，于是有

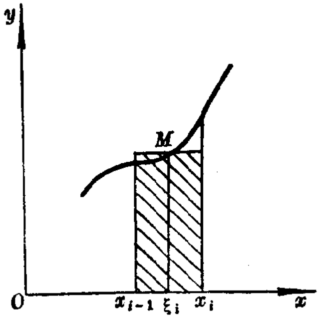


图 14-6

$$\Delta S_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})❶$$
$$= f(\xi_i)\Delta x_i$$

如果我们对于每一个小区间$[x_{i-1}, x_i]$都象刚才讲的那样，于是对于整个曲边梯形来讲，即得一个台阶形的图形。如图14-5b。

今设S为曲边梯形的面积，则由面积的可加性❷，我们有

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i❸$$

于是 $S \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这个近似值的精确程度，是与分法和每个小矩形的高度的取法有关系的。当把$[a、b]$分成更短的小段时，就可以得到量S的一个更好的近似值。并且，只要将$[a、b]$分得足够细，就会使误差要多么小，就有多么小。

$$\left| S - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right|$$

也就是说，对于任何绝对误差$\varepsilon > 0$，只要将$[a, b]$分得足够细，使每个Δx_i（$i=1, 2, \cdots, n$）都足够小（只要

---

❶ ≈表示近似等于。

❷ 一个量把它分割后再相加，仍等于原来的总量。我们称此性质为可加性。如面积、体积、转动惯量等均有此性质。

❸ 此处Σ为和的缩写符号。

$max|\Delta x_i|$❶足够小即可），就可以保证差值

$$\left|S-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon$$

联系到极限概念，量S就是近似值。

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,\ 当 max|\Delta x_i|\to 0$$

时的极限，经过将近似值取极限的过程，我们就得到了曲边梯形面积这个量的精确概念。

即 $$S=\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

例 2 变速运动的路程

一物体沿着直线OS轴运动，假如每一时刻t的速度$v=v(t)$已知，例如：自由落体运动$v=gt$。我们来求时间t，从O变到T时，物体经过的路程s。如果v是一个常量v_0。（等速运动）则路程$s=v_0T$。但是，对于大量的实际问题来说，v不是一个常量，而是一个变量。因此不能再用上式来计算路程。我们知道在时间间隔不长时，速度变化是不大的。此时，即可近似地将此小段时间的运动看作等速运动。所以我们将时间分成几个小的时间间隔：

$$[O,t_1],\ [t_1,t_2],\ \cdots,[t_{i-1},t_i],\cdots,[t_{n-1},T]$$

在每一个小的时间间隔$[t_{i-1},\ t_i]$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）上，由于$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）很小，在这一小段时间$[t_{i-1},\ t_i]$上，速度变化就不大。近似地可看作等速运动，而以在$[t_{i-1},\ t_i]$上任一时刻τ_i（$t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i$）的速率$v(\tau_i)$为此等速运动的速率。则在时间间隔$[t_{i-1},\ t_i]$上，物体经

---

❶ $max|\Delta x_i|$表示在$|\Delta x_1|$，$|\Delta x_2|$，…$|\Delta x_n|$中之最大者，而$|\Delta x_i|$表示Δx_i的长度。

过的路程作近似表达

$$\Delta s \approx v(\tau_i)\Delta t_i$$

这样，由于在$[O, T]$上，物体所经过的路程s等于各小段时间间隔所经过的路程$\Delta s_i(i=1, 2, \cdots, n)$的总和。得出$s$的一个近似值：

$$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

当把$[O, T]$无限地分细以后，近似值：

$$\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

也就可以任意地接近于s

$$s = \lim_{max|\Delta t_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

从上面的叙述，我们解决了计算变速运动的路程问题。

例 3 变力所作功的问题

当一个物体受到一个不变的外力作用，沿外力方向作直线运动时，经过距离s。从物理学中知道，常力F所作的功为：

$$W = F\cdot s$$

当物体沿直线Ox轴运动时，且作用在物体上的力在随地变动时，也就是说力F是其坐标x的函数。

即 $$F=\varphi(x)。$$

问当物体从A点（$x=a$）运动到B点（$x=b$），变力$F=\varphi(x)$所作的功。这里遇到一个与常力作功不同的概念。那么，如何计算这个功呢？这就必须给它一个精确而合乎实际的定义。

现在仍以近似概念来解决这个问题。我们知道F虽然跟着x的变化而变化，但是当运动的距离不大时，F的变化也

不大。此时即可以近似的将F看作常量。变力作功的问题，即可近似地看作常力作功的问题。因此，我们将整个路程$[a, b]$分为m个小段。设分点坐标为：

$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$(图14-7)。

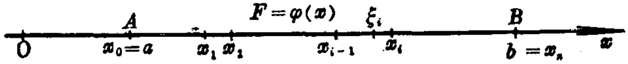


图 14-7

则物体从A运动到B时，F所作的功等于：

物体在每一小段$[x_{i-1}, x_i]$($i=1, 2, \cdots, n$)上运动时，力F所作功ΔW_i($i=1, 2, \cdots, n$)的总和。即

$$W=\Delta w_1+\Delta w_2+\cdots+\Delta w_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta w_i$$

当每一小段的距离$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$($i=1, 2, \cdots, n$)很小时，在$[x_{i-1}, x_i]$上，力F的变化不大。即可近似地将力F看作常量，以物体在$[x_{i-1}, x_i]$任一点ξ_i上所受的力$\varphi(\xi_i)$来表示。所以

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i$$

若我们将区间$[a, b]$无限制地分细，则可得到W的任意精确的近似值。也就是说，对于任何绝对误差$\varepsilon>0$，只要将$[a, b]$分得足够细，而使得$max|\Delta x_i|=\lambda<\delta$（$\delta$为某一正小数）时，一定能保证差值

$$\left|W-\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right|<\varepsilon$$

从这里，我们看到W就可以用和数

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i \text{ 在}\lambda\to 0$$

时的极限来精确度量

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i$$

通过上面的三个问题。从它们实际意义看是不同性质的。但是如果不谈这些问题的具体内容，而只注意它们的分析方法，很明显地可以看出，它们是没有区别的。即求面积、路程、功都可以用一个“和式的极限”来度量。换句话说，这些问题都要求我们计算某一个有确定结构的和数的极限。

再从另一个角度来看，假如我们将 $v=v(t)$，$F=\varphi(x)$ 的函数图形画出来，在这些曲线下面的曲边梯形的面积（图 14-8，图 14-9）也就可以代表路程 s 和功 W 的大小。这里

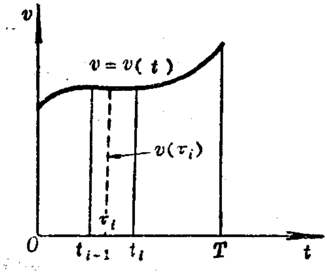


图 14-8

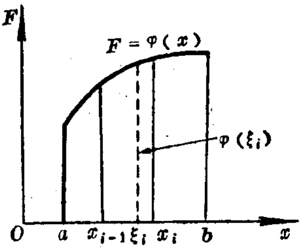


图 14-9

可以清楚地看出，这些量虽然代表不同的实际意义，可是它们在数学本质上都是一样的。

在一系列几何、物理、技术、其他的知识领域以及人们的实践活动中会遇到大量这类问题。它们的分析方法与我们刚才考虑过的问题的分析方法完全一样。因此，我们有必要将各个具体问题加以抽象，将它们共同的数学本质——“和

的极限”——一般化，于是我们得到了定积分的定义如下：

（二）定积分的定义

定义　**设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上有定义，用分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$将区间$[a,b]$分为$n$个子区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$)，把这种分法记作$T$。在这一区间$[x_{i-1},x_i]$($i=1,2,\cdots,n$)上任取一点$\xi_i$($x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$)，令$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$($i=1,2,\cdots,n$)作和数：**

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

若有一个常数I，假如对于任意给定$\varepsilon>0$，都存在一个$\delta>0$，当$max|\Delta x_i|<\delta$时的任何分法T，与ξ_i的任何取法，恒有

$$\left|I-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|<\varepsilon$$

成立，则称I是函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的定积分，简记为：

$$I=\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$称为**被积函数**，x称为**积分变量**，a、b分别称为定积分的**下限**、**上限**。

从定积分的定义里，我们看到：虽然和式$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$与分法有关，与$\xi_i$的取法也有关。但是定积分却是一个常数，它与区间的分法和点的取法是无关的。I的数值只与被积函数$f(x)$和区间$[a,b]$的端点a，b有关。如果被积函数的关系式和a、b给出了，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

就唯一确定了。但是这积分式并不依赖于积分变量 x，改变积分变量的记号，并不会影响到定积分的值；换句话说，表达式：

$$\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^b f(y)dy,\ \int_a^b f(t)dt,\ \int_a^b f(u)du$$

等等，都代表同一个定积分。我们若再看看表达式：

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k},\ \sum_{l=1}^{20}\frac{1}{l},\ \sum_{m=1}^{20}\frac{1}{m}$$

等等都代表同一个和式：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}$$

就完全明白了。原来这个"和"与我们怎样选择**和用什么字母完全无关**。通过这个具体的简单例子，更可以说明积分与积分变量的选择完全无关了。

（三）定积分的几何解释

由定积分的定义，我们知道：假如

$$f(x)\geqslant 0,\ \int_a^b f(x)\,dx$$

即代表曲边梯形 $AMNB$（图14-3）的面积。若

$$f(x)\leqslant 0,\ 则\ \int_a^b f(x)\,dx$$

就等于 $AMNB$ 的面积加一个负号（图14-10）。若 $f(x)$ 的值

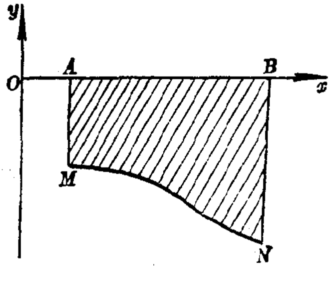


图 14-10

在区间$[a,\ b]$上有时为正，有时为负如图14-11。则$\int_a^b f(x)\,dx$

代表

$$-(AMC\text{的面积})+(CPD\text{的面积})$$
$$-(DQE\text{的面积})+(ENB\text{的面积})$$

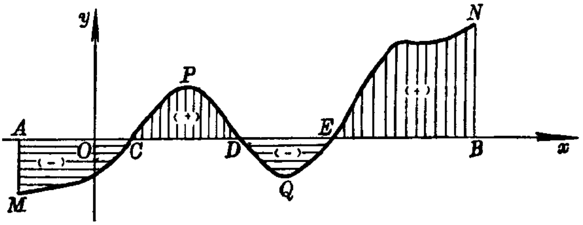


图 14-11

所以，要计算曲线与x轴所成的面积时，我们就要先把曲线与x轴的交点求出。然后分段计算，取其各个的绝对值。最后加到一起，就得总的面积。如果不分段，一次计算下去，在所得的结果中有些部分正负数抵消了。所得到的数值就不能代表所要求的面积的总和。一般情况，如果不是求面积问题，只是要求定积分之值，那么就不必分段考虑，一次计算完了即可。

总上所述，我们得到了定积分概念。在处理具体问题中，用近似计算，然后无限精确化的过程，使我们能度量某些量。也只有通过这种不断接近的观点，才使我们认识了这些量，并能用数来表示它们。

从历史上看，由于生产的需要，对各种不同的量（面积、功、重心、体积、等等）的计算最初是用“和的极限”的方法，积累了大量的资料。人们对这些量的数学本质有了

全面的深入的了解。由于生产的不断发展，遇到的具有这种数学结构的量就更多。于是抽象出定积分概念。（这不仅是可能的，而且也是切合实际需要的）。有了这个一般的概念，我们就不再局限于只会处理个别的具体问题，而是能处理大量的具体问题。这种从具体到一般，又从一般到具体的过程，正是辩证唯物主义中实践论原则的体现。

（四）定积分存在定理的叙述

定积分是和式的极限。这个极限是否存在呢？它在什么条件之下才存在呢？现在让我们再分析以前所讲的那几个具体例子。不难发现，在那里我们都假定了被积函数（如面积问题中的 $y=f(x)$，路程问题中的 $v=v(t)$，作功问题中的 $\varphi(x)$），在自变量变化不大时，函数值也变化不大。这实际上是假定了被积函数的连续性。因此，我们可以认为连续函数的定积分是存在的；也就是说，连续函数的积分和式的极限是存在的。现将定积分存在定理叙述如下，不予证明。

定积分存在定理　**设函数 $y=f(x)$，在 $[a, b]$ 上是连续的，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分**

$$\int_a^b f(x)dx$$

存在[1]。

如果 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的。

知道了定积分的定义，下面讲述定积分的计算方法。为此，先看下面的两个例题：

---

[1] 证明见菲赫金哥尔茨：《微积分学教程》第二卷第一分册 P93。或江泽坚等人编：数学分析上册，第四章第 2 节 P220。

例 1 计算$\int_a^b x dx$的值，$0<a\leqslant x\leqslant b$

此时被积函数 $y=x$，这个定积分所代表的面积为一梯形。梯形的面积，我们在初等数学中就知道。它等于

（上底＋下底）×高÷2

即 $$A=(a+b)\cdot\frac{b-a}{2}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\quad（图14-12）$$

这是读者所熟知的。现在用定积分的定义与存在定理核算一下，看所得的结果与所学过的知识是否一致。如果一致，就更可以说明定积分定义和存在定理的合理性。

由于$y=x$，在$[a, b]$上连续，所以此函数可积。因此，用任何分法以及ξ_i的任何取法都无关系。既然如此，我们就把$[a, b]$分为n等分，并且把ξ_i取为各子区间的左端点（图14-13）。

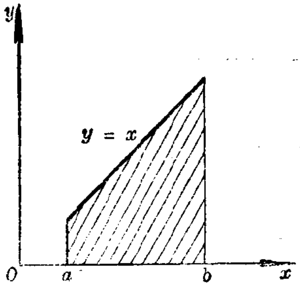


图 14-12

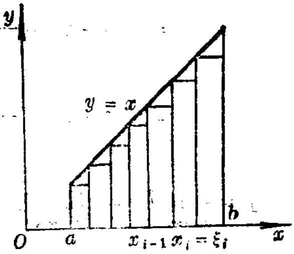


图 14-13

即 $$\Delta x=\frac{b-a}{n},\quad \xi_i=x_i$$

$$x_0=a、\quad x_1=a+\Delta x、\quad x_2=a+2\Delta x、\cdots x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x$$

$$I'=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i=\{a+(a+\Delta x)+(a+2\Delta x)+\cdots$$
$$+[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x$$
$$=\{na+[1+2+3+\cdots+(n-1)]\Delta x\}\Delta x$$

因 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，故 $na\Delta x=a(b-a)$

又因 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n--1)}{2}$

这是因为：若设

则
$$S_n=1+2+3+\cdots(n-2)+(n-1)$$
$$\underline{S_n=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1}$$
$$2S_n=\underbrace{n+n+n+\cdots+n+n}_{(n-1)\text{个}n}$$

$\therefore\quad 2S_n=n(n-1)\qquad\therefore\quad S_n=\dfrac{1}{2}n(n-1)$

所以
$$I'=a(b-a)+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$
$$=a(b-a)+\frac{n(n-1)}{n^2}\,\frac{(b-a)^2}{2}$$
$$=a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$I=\lim_{n\to\infty}I'=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=ab-a^2+\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

所以 I 即是我们所要求的梯形面积 A。这个结果与我们以往

所知完全一致。

例 2 试计算$\int_a^b x^2\,dx=?$

$0\leqslant a\leqslant b$（图14-14）

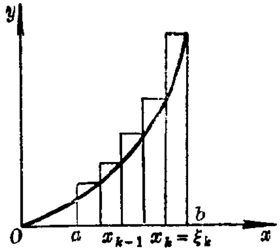


图 14-14

解 理由同例 1。我们把区间$[a, b]$ n等分，取ξ_k为子区间的右端点：$\xi_k=x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$。

$$\Delta x_k=\frac{b-a}{n}=\Delta x\ (k=1,2,\cdots n)$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}\ (\text{因为等分})$$

$$\therefore \qquad \xi_k=a+k\frac{b-a}{n}=a+k\Delta x$$

积分和数：

$$I'=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(a+k\Delta x)^2\Delta x$$

$$=\Delta x\sum_{k=1}^{n}[a^2+2ak\Delta x+k^2(\Delta x)^2]$$

$$=\Delta x\{[a^2+2a\Delta x+(\Delta x)^2]+[a^2+2a\cdot 2\Delta x+2^2(\Delta x)^2]+\cdots+[a^2+2an\Delta x]+n^2(\Delta x)^2]\}$$

$$=\Delta x na^2+2a\ \Delta x^2\sum_{k=1}^{n}k+(\Delta x)^3\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{b-a}{n}\ na^2+2a\frac{(b-a)^2}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)+\frac{(b-a)^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=a^2(b-a)+2a\cdot\frac{(b-a)^2}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2}+\frac{(b-a)^3}{n^3}$$

$$\times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ ❶

$$= a^2(b-a) + a(b-a)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

所以 $\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \to \infty} I'$

$$= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

从这两个例题中，我们看出，连一个极简单的函数 $y=x$ 求定积分也不太简单。对于函数 $y=x^2$ 的定积分计算就更繁。如果是一个不连续且较复杂的函数，那很可能就无法进行计算。在很久以前，古希腊阿基米德就曾经用此法计算抛物线 $y=x^2$

---

❶ 关于 $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的证明：

因 $(v+1)^3 - v^3 = 3v^2 + 3v + 1$，令 $v = 0, 1, 2\cdots, n$。

我们有 $1^3 - 0 = +1$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$\cdots\cdots$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

+）

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n + 1$$

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n - 1$$

$$= (n+1)\left\{(n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n\right\}$$

$$= (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

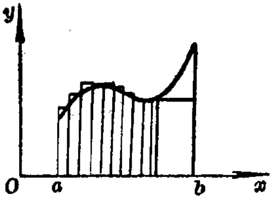
$$\therefore \quad S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

与 x 轴所围成的面积。可是再复杂一点，比如 $y=x^3$，他就无法计算下去了。因此虽然有了定积分概念，但无法解决计算问题。一直到十七世纪，由于工业的发展和需要，才由牛顿和莱布尼兹解决这个计算问题。为此，我们要进行下一节定积分的性质的研究，找出定积分与不定积分的关系。

习 题 14-1

1. 在定积分的定义中有 $max|\Delta x_i|\to 0$，为什么不用 $n\to\infty$ 代替之，又在例 1、例 2 中又为什么可以用 $n\to\infty$ 呢？

提示：见右图。

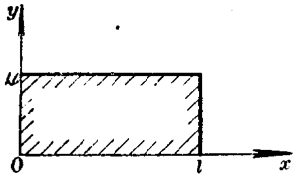


第 1 题图

2. 棍长 l，其均匀线密度为 μ，按定积分定义，求此棍质量，并用定积分表示之

答：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu\Delta x_i=\int_0 \mu dx$

3. 试用定义计算 $\int_0^l \mu dx=?$ 并用面积来解释这个结果。



第 3 题图

答：μl

4. 用定积分定义，按下法求 $y=x$，$x_1=20$，$x_2=30$ 与 x 轴之间的面积。

提示：①将 [20,30] 分为 n 等分，取 ξ_i 为子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的右端点，即 $\xi_i=x_i$。答：250

②把阶梯形面积 A_n 表示为 n 的函数，并化简之。

答： $200+50\left(1-\frac{1}{n}\right)$

③$n=10,100$时，计算A_n 答：245，249.5

④求 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=?$ 答：250

5*.假设同上题，但ξ_i取在区间$[x_{i-1}, x_i]$的$\frac{1}{3}$处，即

$$\xi_i=x_{i-1}+\frac{1}{3}(x_i-x_{i-1})$$

试计算此梯形面积。　　　　答：250

6*.假设同3题，将[20,30]分为n份，令分点与端点的坐标成等比级数（不等分），而ξ_i取为子区间$[x_{i-1},x_i]$的左端点，即$\xi_i=x_{i-1}$。

答：250

提示：分点：$a<aq<aq^2\cdots<aq^n=b$

子区间是：$[a,aq]$，$[aq,aq^2]$，$\cdots[aq^{n-1}, aq^n]$

选取点ξ_i为子区间$[aq^{i-1}, aq^i]$左端点aq^{i-1}

即　　　　$\xi_i=aq^{i-1}$　$f(\xi_i)=\mu aq^{i-1}$

通过3、4、5题，我们更具体地证实了，若定积分存在，其值是与分法和ξ_i的取法无关。

7.设已知 $\int_a^b t^2dt=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$，求由曲线$x=y^2$，$y$轴与$y=2$所围成的面积。答：$\frac{8}{3}$

8*.设棍长1个单位，棍之左端点为原点，且其上坐标为x处之线密度为$\mu(x)=e^x$，试求棍之质量。

提示：用等分法，取ξ_i为$[x_{i-1}, x_i]$的右端点。

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e\right)$$

利用等比级数和的公式$S_n=\frac{a-ar^n}{1-r}$及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\left(设\frac{1}{n}=x\right)$最后得 $e-1$ 为所求。

9*. $\int_0^1 mxdx=?$ $\Big($等分区间，ξ_i为区间$[x_{i-1}, x_i]$上任一点。即$\xi_i=x_i+\theta d$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant 1$，$d=\frac{1}{n}\Big)$

答：$\frac{m}{2}$

10*. $\int_1^2\frac{dx}{x^2}$(取分点之坐标成等比级数，而

$\xi_i=\sqrt{x_{i-1}x_i}$)

提示：$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{1-2i}{n}}(2^{\frac{i}{n}}-2^{\frac{i-1}{n}})$

化简即得： $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

§2 定积分的基本性质

前面我们从一些实际问题看到，有必要介绍这样一个应用极为广泛的定积分概念，并且我们已经有了一个精确的定义。那就是，和的极限。但是，这个定义并没有给出定积分的计算方法。因为除了极个别的例子外，我们事实上不可能用和的极限来计算一个定积分。在本节及以下诸节，我们有系统地研究定积分的一些基本性质，然后找出定积分的计算问题。

（一）定积分的基本性质

定理 1　**如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，C 是任意一个常数，则 $Cf(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积。**并且

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

证　对于区间 $[a,b]$ 上任意分法，不管点 ξ_k 如何取法，都有：

$$\sum_{k=1}^{n} Cf(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = C\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

取极限 $\lim\limits_{max|\Delta x_k|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} Cf(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

$$= C\lim_{max|\Delta x_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

由定积分定义，此等式即 $\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$（这个性质即是说，常因子可以提到积分号外）

推论　$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$

证　$\int_a^b C\,dx = \lim\limits_{max|\Delta x_k|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} C\Delta x = C\lim\limits_{max|\Delta x_k|\to 0}$

$$\times\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = C\lim_{max|\Delta x_k|\to 0}(b-a) = C(b-a)$$

定理 2　**如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在区间 $[a,b]$ 上可积，则函数 $f(x)+g(x)$ 在该区间上也可积**

且　$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

证 因 $\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)+g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$=[f(\xi_1)+g(\xi_1)]\Delta x_1+[f(\xi_2)+g(\xi_2)]\Delta x_2+\cdots+[f(\xi_n)+g(\xi_n)]\Delta x_n$$

$$=[f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n]+[g(\xi_1)\Delta x_1+g(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+g(\xi_n)\Delta x_n]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$$

取极限

$$\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\Delta x_i+g(\xi_i)\Delta x_i]$$

$$=\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i$$

故由定积分定义，我们有：

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

这个性质就是说：**两个函数的代数和的积分等于它们积分的代数和。**

推论 $\int_a^b[\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})+\cdots+\boldsymbol{f}_l(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{dx}$，（即有限个被积函数）

$$=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+\cdots+\int_a^b f_l(x)dx$$

定理 3 **若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在区间$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$上可积，当其积分上下限颠倒次序后，其值改号。**

即 $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

证 设由 a 到 b 分点依次为 x_0， x_1， x_2，…， x_n， 由定积分定义，我们有：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \text{，（此处} x_i - x_{i-1} = \Delta x_i\text{）}$$

$$= \lim_{max|\Delta x_i|\to 0} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots$$

$$+ f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n]$$

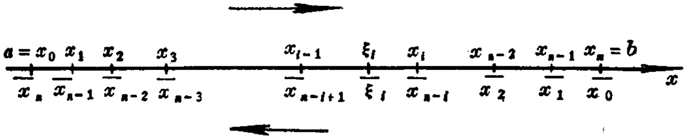


图 14-15

今用同一分点，由b到a，设其分点依次为$\bar{x}_0$，$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$…，$\bar{x}_n$，则$\bar{x}_0 = x_n = b$，$\bar{x}_1 = x_{n-1}$，$\bar{x}_2 = x_{n-2}$，…，$\bar{x}_n = x_0 = a$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i)\Delta\bar{x}_i$$

此处 $\Delta\bar{x}_{n-i+1} = \bar{x}_{n-i+1} - \bar{x}_{n-i} = x_{i-1} - x_i = -\Delta x_i$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{max|\Delta\bar{x}_i|\to 0} [f(\bar{\xi}_1)\Delta\bar{x}_1 + f(\bar{\xi}_2)\Delta\bar{x}_2 +$$

$$\cdots + f(\bar{\xi}_{n-1})\Delta\bar{x}_{n-1} + f(\bar{\xi}_n)\Delta\bar{x}_n]$$

但 $\Delta\bar{x}_{n-i+1} = -\Delta x_i$，$f(\bar{\xi}_{n-i+1}) = f(\xi_i)$

所以 $$\int_b^a f(x)dx = \lim_{max|\Delta x_i|\to 0} [-f(\xi_n)\Delta x_n - f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

$$-\cdots-f(\xi_2)\Delta x_2-f(\xi_1)\Delta x_1]$$

$$=-\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}[f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots$$

$$+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}+f(\xi_n)\Delta x_n]$$

$$=-\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=-\int_a^b f(x)dx$$

推论 $\int_a^a \boldsymbol{f(x)dx=0}$

证 因 $\int_a^a f(x)dx=-\int_a^a f(x)dx$

$$2\int_a^a f(x)dx=0,\text{ 但 } 2\neq 0$$

所以 $$\int_a^a f(x)dx=0$$

它的几何意义是很明显的，因为底边缩成一点 a，而高为$f(a)$的一个线段的面积当然为零。

定理 4 **设$a<c<b$,并且$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则**

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}=\int_a^c \boldsymbol{f(x)dx}+\int_c^b \boldsymbol{f(x)dx}$$

证 分为两种情形来谈

1）c 恰为分点（图14-16）

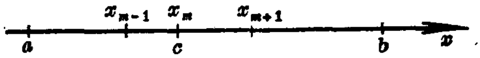


图 14-16

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

取极限

$$\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{max|\Delta x_j|\to 0}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\Delta x_j$$

$$+\lim_{max|\Delta x_k|\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

按定积分定义即得：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2 ）C不在分点上（图14-17）

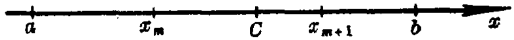


图 14-17

因为既然假定$f(x)$在$[a, b]$上可积，因此它的定积分的存在就与分法无关。于是，我们可以在区间$[x_m, x_{m+1}]$上，添一个分点C，于是用情形 1 ）的方法，立即得到证明。

推论 1　**当$c \leqslant a \leqslant b$时，定理仍然成立**

证　因 $\int_c^b = \int_c^a + \int_a^b$

所以 $$\int_a^b=\int_c^b-\int_c^a=\int_a^c+\int_c^b$$

推论 2　**当$a\leqslant b\leqslant c$时，定理仍然成立**

证　因 $\int_a^c=\int_a^b+\int_b^c$

所以 $$\int_a^b=\int_a^c-\int_b^c=\int_a^c+\int_c^b$$

推论 3　**有限个分点，c_1，c_2，…，c_l**

则有$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1}f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2}f(x)dx+\cdots$$

$$+\int_{c_l}^b f(x)dx$$

定理 5　**如果 $f(x)$在$[a, b]$上可积，且 $f(x)\geqslant 0$，又$a<b$，则**$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$

证　因 $$\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant 0$$

即 $$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$$

定理 6　**若$f(x)$，$\varphi(x)$在$[a, b]$上可积，且$f(x)\leqslant\varphi(x)$，又$a<b$，则有：**

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b\varphi(x)dx$$

证　因$\varphi(x)-f(x)\geqslant 0$所以由定理5得

$$\int_a^b[\varphi(x)-f(x)]dx\geqslant 0$$

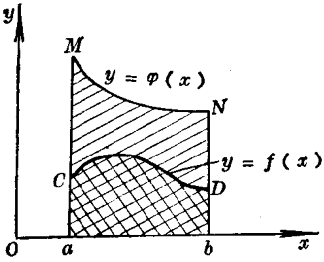


图 14-18

即 $\int_a^b\varphi(x)\,dx-\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$

即　$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b\varphi(x)dx$

几何解释见图14-18，即曲边梯形面积$abDC$＜曲边梯形面积$abNM$

定理 7　（估值定理）

设$f(x)$在$[a, b]$上可积，且$m\leqslant f(x)\leqslant M$，

则 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$

证　因$m\leqslant f(x)$，由定理6有：

$\int_a^b mdx\leqslant\int_a^b f(x)dx$；又由定理1的推论可得

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx$$

同理，因$f(x)\leqslant M$，

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b Mdx=M(b-a)$$

几何解释：

矩形$abdc$＜曲边梯形$abGFE$＜矩形$abQP$（图14-19）。

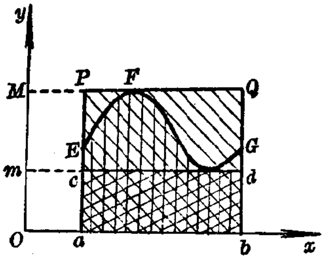


图 14-19

例 1 试估$\int_0^{\pi}\sin x dx$的范围。

解 我们知道在 [0, π] 上，$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，也就是说 $m=0$，$M=1$，又$\pi-0=\pi$，所以

$$0\cdot(\pi-0)\leqslant\int_0^{\pi}\sin x dx\leqslant 1\times(\pi-0)$$

即
$$0\leqslant\int_0^{\pi}\sin x dx\leqslant\pi$$

例 2 试估$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$的范围。

解 因$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$在$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$上为负，因此知曲线$y=\frac{\sin x}{x}$在$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$上为下降（图14-20）。所以$x=\frac{\pi}{4}$处，函数有最大值，

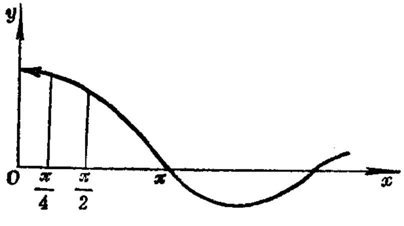


图 14-20

即
$$M=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}。$$

在$x=\frac{\pi}{2}$处，函数有最小值，

即
$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}。$$

所以
$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

即
$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\,dx\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

例 3 试估$\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx$的范围。

解 $f(x)=\frac{5-x}{9-x^2}$先求出$f(x)$在[0，2]上的最大值与最小值。求最大值与最小值的方法是先求$f(x)$在[0,2]上

的极大值与极小值，然后再与区间的两端点 $x=0$，$x=2$ 处 $f(x)$ 的值比较，最后可得 M 与 m。

因 $f'(x)=\dfrac{-(x^2-10x+9)}{(9-x^2)^2}=-\dfrac{(x-1)(x-9)}{(9-x^2)^2}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，$x=9$，但 $x=9$ 已超出 $[0, 2]$ 的范围，故不必研究。今只取 $x=0$，$x=1$，$x=2$ 三处的函数值比较之：

$$f(0)=\frac{5}{9},\quad f(1)=\frac{1}{2},\quad f(2)=\frac{3}{5},$$

故知

$$m=\frac{1}{2},\ M=\frac{3}{5}.$$

所以

$$\frac{1}{2}(2-0)\leqslant\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx\leqslant\frac{3}{5}(2-0)$$

即

$$1\leqslant\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx\leqslant\frac{6}{5}$$

推论 1 **若在 $[a, b]$ 上有 $|f(x)|\leqslant\varphi(x)\leqslant M$ 则有：**

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b\varphi(x)dx\leqslant M(b-a)$$

证 由假设 $-M\leqslant-\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant M$ 所以由估值定理有：

$$-M(b-a)\leqslant-\int_a^b\varphi(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)dx$$

$$\leqslant\int_a^b\varphi(x)dx\leqslant M(b-a)$$

所以

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b\varphi(x)dx\leqslant M(b-a)$$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$

证 设$\varphi(x)=|f(x)|$，用推论 1 立即得证

定理 8 （定积分的中值定理）

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，则至少存在一个$\xi\in[a, b]$

使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

成立。

在证明这个定理之前，让我们先看看它的几何意义。如果取$f(x)$在$[a,b]$上最大值作为高，以$(b-a)$作为底，这个矩形的面积显然要比原来的曲边梯形面积来得大（图14-21 a）。

即矩形$abcd$>曲边梯形$abce$

如若取$f(x)$在$[a, b]$上的最小值为高，以（$b-a$）为底，则此矩形的面积又显然要比曲边梯形的面积来得小（图14-21b）。

即矩形$abed$<曲边梯形$abcd$

积分中值定理说明如果$f(x)$在$[a, b]$上连续，那么，就一定存在一个ξ（至少一个），$\xi\in[a, b]$，使得以$f(\xi)$为高，以（$b-a$）为底的矩形，其面积恰巧等于曲边梯形的面积（图14-21 c）。

图 14-21c 中①矩形之高为：$f(\xi)=f(\xi_1)=f(\xi_2)=(\xi_3)$②矩形之底为$(b-a)$。

即矩形面积$abcd$=曲边梯形$abfghe$

现在证明这个定理如下：

由估值定理可得，

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

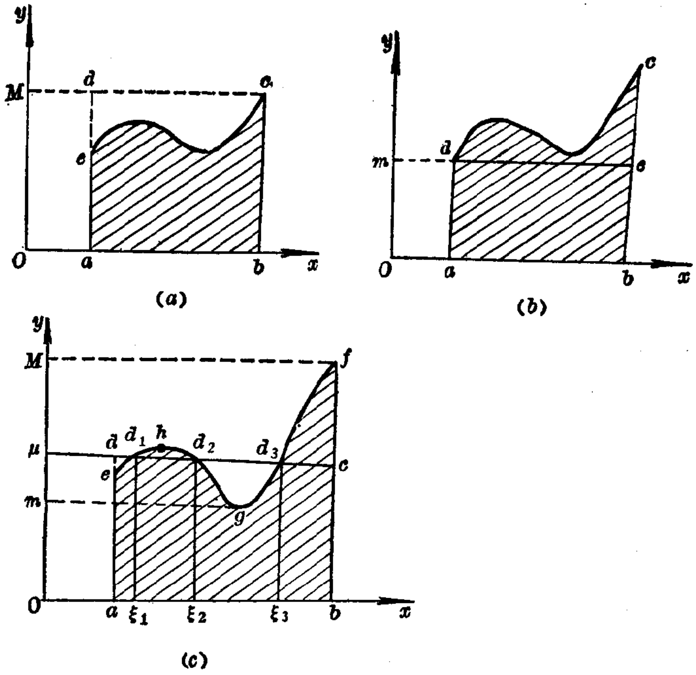


图 14-21

以（$b-a$）除之，（$a\neq b$，$b-a\neq 0$）得：

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\leqslant M$$

因$\int_a^b f(x)dx$与$(b-a)$均为固定的常数，所以

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

自然也是固定的常数，今令其为μ

即
$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

于是有：
$$m\leqslant\mu\leqslant M$$

由连续函数的基本性质知：

$f(x)$在$[a,\ b]$上连续，故$f(x)$必定取得m，M之间的一切值。所以至少存在一个$\xi\epsilon[a,\ b]$，使$f(\xi)=\mu$，即$m\leqslant\mu\leqslant M$

亦即
$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\mu=f(\xi),\quad \xi\epsilon[a,\ b]$$

或写为：
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

从图形上看（图14-21c）即是在y轴上两点m与M之间总会有这样一个μ，然后由μ画平行于x轴的直线。此直线一定会与曲线相遇。（因$f(x)$为连续），再由此相遇之点d_1，d_2，d_3作平行于y轴的直线交x轴于ξ_1，ξ_2，ξ_3，因而

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=\mu$$

例 1 应用积分中值定理求梯形面积（图14-22a）的中值。

解 由本章§1(二)定积分定义，我们知：

$$A=\int_a^b ydx=\int_a^b xdx$$
$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

应用中值定理，又有：

$$\int_a^b x dx=(b-a)f(\xi)$$

因　　$y=x$，所以$\mu=f(\xi)=\xi$，

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx=(b-a)\xi$$

即　　$$\frac{1}{2}(b^2-a^2)=(b-a)\xi$$

因得　　$$\xi=\frac{1}{2}(b+a)=\mu$$

即梯形面积$=\frac{1}{2}(b+a)(b-a)=$(上底＋下底)×高×$\frac{1}{2}$，图14-22(b)中阴影部分的两三角形全等，截长补短，而成一矩形$abcd$。ξ恰为$(b-a)$之中点。即$\xi=\frac{1}{2}(a+b)$。

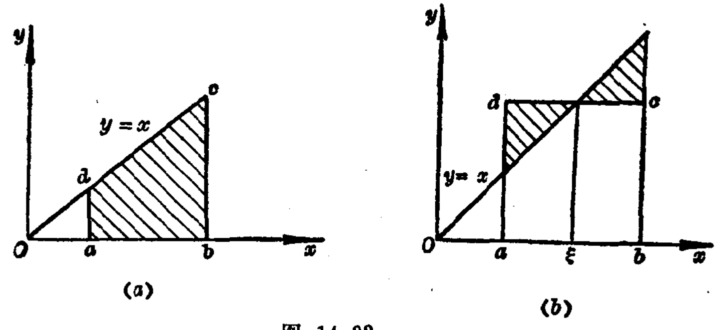


图 14-22

这个例题是极简单的情况，故ξ可求得。在一般的情况，要想找出ξ不是件容易的事。这个定理只是告诉我们确实有这样一个ξ存在。并没有提供我们求出ξ的任何方法。所以一

般情况读者不要企图去找ξ。

（二）算术中值

设有n个数值y_1，y_2，$\cdots y_n$，今定义：

$$\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

为算术中值。

例如一昼夜间每小时量一次温度，则这些数值之和用24除之，即得算术中值。在一个量的若干已知值中，有的大于、有的小于它的中值（并且可能其中没有一个值是恰好等于中值的）。

我们常常不需要去考虑一切已给值的总体，而只考虑它们的中值。因为后者在某种程度上能标致出该总体的特性。如果我们说一昼夜间空气温度的中值是10.5°C，尽管在某个钟点内的温度可能有高于或低于10.5°C的。但是这个值毕竟可以使我们大致了解整个时间内温度变化情形。

但若我们连续不断地测出一个量的大小，并且要用其一个“中值”来标致出这一切值的总体性质。例如，已知一昼夜间，每顷刻的空气温度，换句话说，设已给温度是时间的函数。在这种情形下，如果要考虑到所有的已知温度值，试问用什么方法去确定空气温度的“中值”（即平均温度）？就一般情形说，试问应该拿什么数值作为连续函数$y=f(x)$在某区间$[a,\ b]$上的中值？

今用点　$x_0=a$，x_1，x_2，$\cdots$，x_{n-1}，$x_n=b$。把区间$[a,b]$分成n等分，并取各点处的值如下：

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ \cdots,\ y_n=f(x_n)$$

这时我们暂且不管区间$[a,\ b]$上其它一切点处的函数值，而取上述n个函数值的算术中值：

$$\eta_n=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

显然地，若n愈大，则求中值时所考虑的函数值愈多。因此，我们自然可以取η_n在$n\to\infty$时的极限作为函数的“中值”$\overline{y}$。现在我们来求这极限。

用（ $b-a$ ）乘、除上式的各项有：

$$\eta_n=\frac{1}{b-a}\left(y_1\frac{(b-a)}{n}+y_2\frac{(b-a)}{n}+\cdots+y_n\frac{(b-a)}{n}\right)$$

但$\frac{b-a}{n}=\Delta x_i$，故：

$$\eta_n=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}y_i\Delta x=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

取极限即得：

$$\overline{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

根据积分中值定理知，$\overline{y}=f(\xi)$，其中$a<\xi<b$，也就是说，连续函数在区间上的“中值”（如果函数不是常量）总小于它的某些值，而大于它的另一些值，至少等于该区间上（在“中间”点处）的一个函数值。

函数的中值概念在工程上非常有用。有许多量常是拿它的中值来作标志的。例如，蒸气压力，交流电流强度的平均值，化学的反应速度等等都是，这将在定积分应用中再举例。

同一个量有时可以看作是某种变量的函数，有时也可以看作是它种变量的函数。这时该量对于那些变量的中值，一般说来是各不相同的。例如，在真空中的自由落体的运动

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

中，速度v可以看成时间的函数。即$v=gt$，也可以看成是路程的函数。即$v=\sqrt{2gs}$。

现在要求速度平方对于时间及路程两者的中值。

v^2在时间 0 到T内的中值等于

$$(\overline{v^2})_t = \frac{1}{T}\int_0^T g^2t^2dt = \frac{1}{3}g^2T^2$$

v^2在路程 0 到 s 内的中值等于

$$(\overline{v^2})_s = \frac{1}{s}\int_0^s 2gsds = gs = \frac{1}{2}g^2T^2, \quad \left(s = \frac{1}{2}gT^2\right)$$

所以一个量（或函数）的中值概念是相对的，它不仅要根据它的全部已给数值来决定，也要根据考虑中值所取自变量的性质而决定。

简 短 小 结

读者可以看出在这一节中，定积分的性质几乎都是直接用定义即可得证。在学习这一节时，一方面可以利用这些性质为下一节服务；另一方面通过这些证明也可以对定积分的定义起到复习的作用。关于估值定理的用途是因为有时关于积分的准确值很难求出，甚至不能求出。但若能估出它的值的范围，即使是很粗略的，我们总可以知道它所表示的那个数的大小程度。在数学上常常要碰到这一类的估值法。但是，估值定理在我们这里主要的是为中值定理服务。估值定理计算方法的关键是求函数的最大、最小值，有时并不太简单。因此，在这里只要求懂得估值定理的意义，对于简单的函数会估值也就够了。

中值定理是一个很重要的定理。在下一节中，证定理时要直接用到它。在中值定理中告诉我们确实有这样一个ξ存在。但是，定理并没有提供去找这个ξ的方法。除非特别简单的函数，一般的是不易找到的。虽然如此，只要我们知道它的存在，就已经有很大的用处了。

习　题　14-2

1. 在下列各题内（不用计算，利用定积分的性质）来确定二者之中哪一个定积分较大：

1） $\int_2^5 x dx$ 与 $\int_2^5 x^2 dx$；　　2） $\int_0^1 x dx$ 与 $\int_0^1 x^2 dx$；

3） $\int_0^1 e^x dx$ 与 $\int_0^1 e^{x^2} dx$；　　4） $\int_0^1 2^{x^2} dx$ 与 $\int_0^1 2^{x^3} dx$ ；

5） $\int_1^2 2^{x^2} dx$ 与 $\int_1^2 2^{x^3} dx$。

答：1） $\int_2^5 x dx < \int_2^5 x^2 dx$；　　2） $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$；

3） $\int_0^1 e^x > \int_0^1 e^{x^2} dx$；

4） $\int_0^1 2^{x^2} dx > \int_0^1 2^{x^3} dx$；

5） $\int_1^2 2^{x^2} dx < \int_1^2 2^{x^3} dx$。

2. 估下列各式的范围：

1） $\int_0^2 e^{x^2-x} dx$；　　2） $\int_0^1 e^{x^2} dx$；

3） $\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$；　　4） $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx$。

答：1） 在 $2e^{-\frac{1}{4}}$ 与 $2e^2$ 之间；　　2） 在 1 与 e 之间；

3） 在3与5之间； 4） 在1与$\sqrt{2}$之间。

3.证明下列各不等式：

1） $\frac{2}{5}<\int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1}<\frac{1}{2}$;

2） $\pi<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx<2\pi$;

3） $0\leqslant\int_0^1 \frac{x^7dx}{\sqrt[3]{1+x^6}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$。

§3 定积分与不定积分之间的关系

积分学中要解决两个基本问题：第一个是原 函 数 的 问题。在前一章，我们已经对它作了较为详细的讨论。第二个是定积分的计算问题。直到现在为止，我们尚未获得完全令人满意地解决。原函数的概念与定积分的概念是作为两个完全不相干的概念引进来的。本节的目的就是要来建立它们之间的一定关系。通过这个关系，则积分学中第二个基本问题——定积分的计算问题——就随着获得了解决。因之，积分学也就扩展到广泛的应用。

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上为连续，并设x为区间上的一点。因在部分区间$[a, x]$上函数仍为连续。所以定积分

$$\int_a^x f(x)dx$$

存在。当我们把积分的下限看作是常量，而把上限看作是变量。若给上限以不同的值，我们就会得到积分的对应值。因

此在这种情况下，积分就变为其上限的函数了。今设此函数为$I(x)$于是有：

$$I(x)=\int_a^x f(x)dx$$

这个函数有这样一个特性

$$I(a)=\int_a^a f(x)dx=0$$

另外在这个积分式中的变量x与函数$I(x)$中的自变量x并不相干。在被积式中的x只不过是辅助变量。它是在做出积分（求和）的过程中，从a跑到x（指积分上限）的积分变量。如果我们要算出函数$I(x)$在某一点的特定值，比如说要算出$x=b$时的函数值$I(b)$，那么我们就用b代替积分上限中的x。我们当然不应该用b来代替被积函数中的积分变量。所以为了区别起见，我们就不如另用一个t来作积分变量就更好一些（图14-23）。

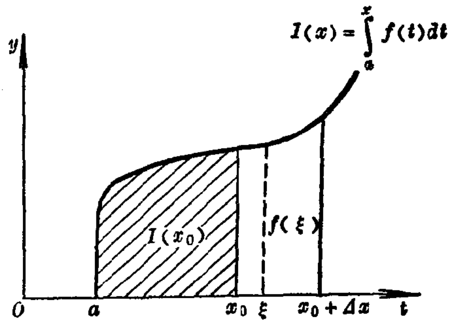


图 14-23

即为：
$$I(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

现在，我们来进一步研究，$I(x)$ 到底是什么样的一个函数？它与$f(t)$究竟又有什么关系？

定理 1　**设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限的函数**

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt$$

具有导数，这个导数等于被积函数，把 $t=x$ 代入的特定值。

即
$$\frac{dI(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

证　$I(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$，$I(x_0+\Delta x)=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt$

$$\Delta I=I(x_0+\Delta x)-I(x_0)=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt+\int_{x_0}^a f(t)dt \text{❶} =\int_{x_0}^a f(t)dt+\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

$$=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \text{❷}$$

---

❶ 由定积分性质 3（即定理 3）。
❷ 由定积分性质 4（即定理 4）。

在区间$[x_0, x_0+\Delta x]$上，对$f(t)$运用一次中值定理

$$\Delta I=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)(x_0+\Delta x-x_0)$$

$$=f(\xi)\Delta x,\quad x_0\leqslant\xi\leqslant x_0+\Delta x \qquad (图14-23)$$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I(x)}{\Delta x}=\frac{dI(x)}{dx}=I'(x)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

因$x_0\leqslant\xi\leqslant x_0+\Delta x$，故当$\Delta x\to 0$时，则

$x_0+\Delta x\to x_0$，所以当$\Delta x\to 0$时，势必有$\xi\to x_0$

所以 $$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)=\lim_{\xi\to x_0} f(\xi)=f(x_0)$$

但x_0没有任何特殊性，去掉足标即有：

$$I'(x)=\frac{d}{dx}I(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \qquad (2)$$

由（1）式知道：**对$f(t)$加上"$\int_a^x$"的一个运算**（我们还不知道这个运算是一个什么样的运算），**得到函数$I(x)$；但（2）式告诉我们对$I(x)$再加上"$\frac{d}{dx}$"的一个运算就得到了与当初对$f(t)$未加运算"$\int_a^x$"时一样。可是，我们知道运算"$\frac{d}{dx}$"乃是求导数的运算，而"$\int_a^x$"本来不知它是哪一类的运算。现在这样一来，就知道了它原来是求导数的逆运算。**换句话说，**它就是一个求原函数的运算。**

所以，我们知道了$I(x)$即是$f(x)$ 的某一个原函数。又对$f(x)$求不定积分

即
$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (3)$$

其中$F(x)$为$f(x)$任意一个原函数。我们知道（3）式中的几何解释是代表一族曲线，而 $I(x)$ 为其中的一条，它过 a 点（图 14-24）。由于这个定理的证明，我们知道：**如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，就保证了它的原函数的存在。**

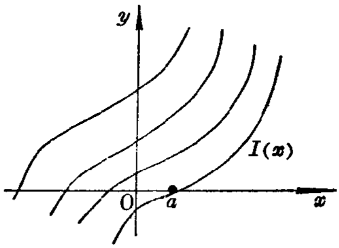


图 14-24

定理 2 （牛顿-莱布尼兹公式）**设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意一个原函数（即 $F'(x)=f(x)$）则**

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (4)$$

证 因$I(x)=\int_a^x f(t)dt$为$f(x)$某一个与 a 有关的原函数，而$F(x)$为$f(x)$任意一个原函数。故$I(x)$与$F(x)$之间相差一个固定的常数。这个常数与 a 有关。今设其为C_1，所以有：

$$I(x)=F(x)+C_1$$

当 $x=a$ 时，
$$I(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

又 $I(a)=F(a)+C_1$ 所以 $0=F(a)+C_1$，因得

$$C_1=-F(a)$$

所以
$$I(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

当 $x=b$ 时，代入上式，我们有：

$$I(b)=\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

关于这个公式，我们常常用下面的记号

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

或
$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

我们前面提出的积分学中第二个基本问题到此才获得满意地解决。由上看出：

牛顿-莱布尼兹公式告诉我们：当你计算定积分时，不须要根据定积分的定义去求和的极限，而是只要把 $f(x)$的**任一个原函数求出，然后将积分上下限代入，取它们之差即为所求**。因此，在实际问题中应用范围极广的定积分的计算问题就转化为求原函数的问题。正是由于这一点，求已给函数的不定积分在数学分析以及它的应用中具有非常重要的意义。

例 1 $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=[\mathrm{arctg}x]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

例 2 $$\int_0^{\pi}\sin x dx=[-\cos x]_0^{\pi}=1-(-1)=2$$

例 3 $\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

例 4 $\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

至此我们可以看出，一个很复杂的定积分问题，实际上是很简单的。当时牛顿在英伦三岛由物理上的运动学出发，莱布尼兹在德国大陆用几何学的观点着手，他们同时发明了微积分。微积分的发明是与科学的发展当时社会背景分不开。那时欧洲由于蒸气机的发明，引起了工业革命。由于社会经济的发展，生产技术的进步，引起的实际需要而促使产生的。微分学是由于要解决非等速运动的瞬时速度问题和在曲线上作切线的问题而产生的。这些问题都是用极限问题加以解决的。而极限概念直到19世纪初才由法国数学家柯西（Cauchy，1789～1857）所奠定。所以牛顿和莱布尼兹当时对这些问题的解决，还未能建立在严密的逻辑基础之上。

习 题 14-3

（ 1 ）计算下列各函数在指定区间内的平均值［$f(\xi)$］

1 ） $y = 2x^2 + 3x + 3$，［1，4］；

2 ） $y = \sqrt{x}$，［0， 10］；

3 ） $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$，［1，8］；4） $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$，［1，4］。

答：1） 24.5； 2） $\frac{2\sqrt{10}}{3}$； 3） $\frac{6}{7}$； 4） $2\frac{2}{9}$。

（ 2 ）求 $\int_0^t \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + x^6}}$ 的最小值（ $t > 0$ ）

答：0。

（3）求下列各式对 t 的导数

1）$\int_0^t \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；　　2）$\int_t^0 \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；

3）* $\int_0^{t^2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$；　　4）* $\int_t^{t^2} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

答：1）$\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}$；2）$\frac{-t\sin t}{1+\cos^2 t}$；提示：$\int_a^b = -\int_b^a$

3）提示：$I(t^2)=\int_0^{t^2}\frac{x\sin x}{1+\cos x}dx=\int_0^u \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$=I(u)$

又 $\frac{dI(u)}{dt}=\frac{dI(u)}{du}\cdot\frac{du}{dt}$

故得 $\frac{2t^3\sin t^2}{1+\cos^2 t^2}$ 为所求

4）提示：$\int_t^{t^2}=\int_t^0+\int_0^{t^2}=-\int_0^t+\int_0^{t^2}$

故得 $\frac{2t^3\sin t^2}{1+\cos^2 t^2}-\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}$

（4*）设隐函数 $\int_2^y \frac{\ln x}{x}dx+\int_2^x \frac{\sin y}{y}dy=0$，求 $\frac{dy}{dx}=?$

提示：设 $I(y)=\int_2^y \frac{\ln x}{x}dx$，　$G(x)=\int_2^x \frac{\sin y}{y}dy$

先求出 $\frac{dI}{dy}$，$\frac{dG}{dx}$，然后用 $-\frac{dG}{dx}\div\frac{dI}{dy}=\frac{dy}{dx}$

即得 $\dfrac{-y\sin x}{x\ln y}$

（5*）.

设 $\begin{cases} x=\displaystyle\int_{2}^{t^2}\frac{\cos x}{x}dx \\ y=\displaystyle\int_{t^2}^{2}\frac{\sin y}{y}dy \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}=?$

提示：可仿4题作，答：$-\operatorname{tg}t^2$。

（6）设 $y=\displaystyle\int_0^{z^2}\frac{dx}{1+x^3}$，求 $\left[\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{z=1}=?$ 答：-2。

（7）计算下列各定积分之值（直接用牛顿-莱布尼兹公式）。

1）$\displaystyle\int_a^b o\,dx$；　2）$\displaystyle\int_1^2\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$；　3）$\displaystyle\int_0^1\frac{x^6}{1+x^8}dx$；

4）$\displaystyle\int_0^2 e^{-x}dx$；　5）$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$；　6）$\displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$；

7）$\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$；　8）$\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$；

9）$\displaystyle\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$；　10）$\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$；

11）$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin x}}$；　12*）$\displaystyle\int_a^b|x|\,dx$，$(a<b)$；

13)* $\int_a^b x\,|x|\,dx=?$ 。

答：1）0，2）$e-\sqrt{e}$，3）$\frac{\pi}{16}$，4）$1-e^{-2}$，

5）$\frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$，6）$\frac{1}{4}$，7）$\frac{\pi}{6}$，8）$\frac{\pi}{2}$，

9）$\frac{1}{2}\ln\frac{4-\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}$，10）1，11）$-0.083$。

12）提示：

①$a<b<0$，$\int_a^b(-x)dx=-\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

②$a<0<b$，$\int_a^0(-x)dx+\int_0^b xdx=\frac{1}{2}(b^2+a^2)$。

③$0<a<b$，$\int_a^b xdx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

答：三个结果合并写成$\frac{1}{2}(b\,|b|-a\,|a|)$。

13）提示：

①$a<b<0$，$-\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$

②$a<0<b$，$-\int_a^b x^2dx+\int_0^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3+a^3)$

③$0<a<b$，$\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$

答：三个结果合并写成$\frac{1}{3}(|b|^3-|a|^3)$。

8 ）试证： $e^{x}-e^{\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{1-e^{x}}}\equiv 1$

提示：$\int_{\ln 2}^{x}\frac{dx}{1-e^{-x}}=\int_{\ln 2}^{x}\frac{e^{x}dx}{e^{x}-1}=\ln(e^{x}-1)$。

§4 定积分的分部积分法与变量置换法

我们在学习不定积分时，已经学过分部积分法和变量置换法。现在我们把这两个方法直接应用到定积分的计算中来。

（一）定积分的分部积分法

设函数 $u(x)$、$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数$u'(x)$、$v'(x)$，则有 $[u(x)v(x)]'=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$ 在这两边各取由 a 到 b 的定积分，

$$[u(x)v(x)]_a^b=\int_a^b u(x)v'(x)dx+\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

即 $$\int_a^b u(x)v'(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

或简写为：

$$\int_a^b udv=[uv]_a^b-\int_a^b vdu \qquad (1)$$

（1）叫做定积分的**分部积分**。

例 1 计算$\int_1^e \ln x dx$之值

解 因 $\int \ln x dx= x\ln x-\int dx$ （由分部积分法）

所以 $\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e$

$= e-(e-1)=1$

例 2 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$

解 因在区间$\left[\frac{1}{e},\ 1\right]$上，$\ln x$为负（图14-25）。

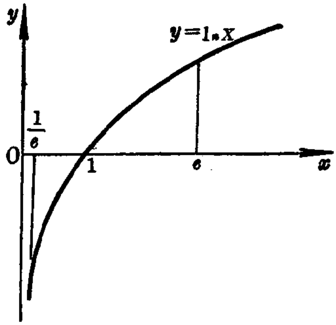


图 14-25

故此时 $|\ln x| = -\ln x$，在区间$[1,\ e]$上，$\ln x$为正。故 $|\ln x| = \ln x$，因此解此题时要分为两部分作。

即 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_1^e \ln x dx$

$= -\left[x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1} dx\right] + \left[x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx\right]$

$= -\left[-1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right] + [e-e+1] = 2\left[1-\frac{1}{e}\right]$

例 3 计算定积分$\int_0^1 xe^x dx$之值

解 $\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e-(e-1)=1$

例 4 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$之值

解 先用分部积分法得出递推公式：

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cdot\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

所以$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx$$

今设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx = I_{n-2}$

所以前面计算的结果，可写为：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

下面按n为偶数，奇数分别讨论之。

1）n为偶数时，以$2m$代上式之n有：

$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2}$，再以$2m-2$代此式中之$2m$

又有：

$$I_{2m-2}=\frac{2m-2-1}{2m-2}I_{2m-2-2}=\frac{2m-3}{2m-2}I_{2m-4}$$

同理有：$I_{2m-4}=\frac{2m-5}{2m-4}I_{2m-6}$，　$I_{2m-6}=\frac{2m-7}{2m-6}$

$$\times I_{2m-8},\ \cdots\cdots,\quad I_6=\frac{6-1}{6}I_{6-2}$$

$$=\frac{5}{6}I_4,\quad I_4=\frac{4-1}{4}\quad I_{4-2}=\frac{3}{4}I_2$$

$$I_2=\frac{1}{2}I_0$$

于是有：$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}$

$$\times\frac{1}{2}I_0$$

2）当 n 为奇数时，以$2m+1$代(上页$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$式）n 则有：

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}I_{2m-1},\ I_{2m-1}=\frac{2m-2}{2m-1}I_{2m-3},$$

$$\cdots,\quad I_7=\frac{6}{7}I_5,\quad I_5=\frac{4}{5}I_3,\ I_3=\frac{2}{3}I_1。$$

于是有：$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{4}{5}$

$$\times\frac{2}{3}I_1$$

但　$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$，　$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1$，

故得

$$\left.\begin{aligned} I_{2n}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}xdx=\frac{1\times3\times5\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\times4\cdots(2n-2)\times2n}\cdot\frac{\pi}{2}\\ I_{2n+1}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}xdx=\frac{2\times4\times6\cdots(2n-2)\cdot2n}{1\times3\times5\times7\cdots(2n-1)(2n+1)}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

对于定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

可以仿此进行，应用下段就要讲的换元法，立刻能证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$$

综上所述，分部积分法的好处在于积出一项 uv 后，立即把上下限代入，使它化为数值，再继续求其余的，而不必等待把不定积分所有的项全部积出后才代入。这样作法确实可以减少一些工作量（至少在书写上），特别在例 4 中体现得就更为突出。

（二）定积分的变量置换法

和不定积分相对应的，定积分中也有变量置换法。这个方法和定积分的分部积分一样，它能使我们简化计算程序。

定理 **设 1) $f(x)$在$[a, b]$上连续；**

2) $x=\varphi(u)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上是单值的，且有连续导数$\varphi'(u)$；

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 且当 u 在区间$\alpha\leqslant u\leqslant\beta$上变化时，由变量置换关系式 $x=\varphi(u)$所确定的x的数值全

部包含于区间$a\leqslant x\leqslant b$内，或包含于较大的而 $f(x)$仍然是连续的区间$A\leqslant a\leqslant x\leqslant b\leqslant B$内，则有：

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\varphi'(u)du \qquad (3)$$

为了证明这个定理，我们考虑两个有可变上限的定积分：

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt \text{及} \ \Phi(u)=\int_\alpha^u f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt。$$

今证明此二函数$I(x)$与$\Phi(u)$均为同一个函数的两个原函数。因此，它们之间应只差一个常数。最后再定出这个常数为零。于是定理即得到证明。

因$x=\varphi(u)$，故$I(x)=I[\varphi(u)]$为u的复合函数，所以用复含函数求导数法：

$$\frac{d}{du}I(x)=\frac{d}{du}\int_a^{\varphi(u)} f(t)dt=f[\varphi(u)]\cdot\frac{d}{du}\varphi(u)$$

$$=f[\varphi(u)]\cdot\varphi'(u)$$

又 $$\frac{d}{du}\Phi(u)=f[\varphi(u)]\varphi'(u)$$

所以我们知道$I(x)$与$\Phi(u)$乃是同一个函数的原函数。因此，应有：

$$I(x)=\Phi(u)+C$$

因当 $x=a$时，$u=\alpha$ 代入$I(x)$、$\Phi(u)$中

得 $$I(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

$$\Phi(\alpha)=\int_\alpha^\alpha f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=0$$

所以　$I(a)=\Phi(\alpha)+C$，即 $0=0+C$，因知

$$C=0$$

所以　$I(x)=\Phi(u)$，又因当$x=b$时，$u=\beta$代入

$$\int_a^x f(t)dt=\int_\alpha^u f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

中得　$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$ 定理得证。

由此可见，用变量置换法计算定积分时，把新的不定积分求出后，不必用所设的变量代回原来的变量。而只要把新的积分限直接代入由换元所得到的不定积分中，然后相减即可以了。

例 1　求$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2dx}$之值

解　设　　　$x=a\sin\theta$

x	0	a
θ	0	$\frac{\pi}{2}$

则$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\cdot a^2\cos^2\theta d\theta$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d2\theta$$

$$=\frac{a^4}{16}[2\theta-\sin 2\theta\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}a^4$$

例 2 计算$\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$之值

设 $$x=\mathrm{tg}\theta$$

x	0	1
θ	0	$\frac{\pi}{4}$

则$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^2\theta\sec^2\theta d\theta}{(1+\mathrm{tg}^2\theta)^3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^2\theta\sec^2\theta d\theta}{\sec^6\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^4\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\theta d2\theta$$

再设 $$u=2\theta$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$
u	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\text{原式}=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u du=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{32}$$ ❶

❶ 引本节(一)段例4，在I_{2n}中设$n=1$情形。

例 3 证明

①当$f(x)$为偶函数时

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx \qquad (4)$$

②当$f(x)$为奇函数时

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0 \qquad (5)$$

证 因$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$

对于第一个积分$\int_{-a}^{0} f(x)dx$作如下的变换

$x=-t$ 则$dx=-dt$，于是上下限改变如下表

x	$-a$	0
t	a	0

所以 $\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt$

又因定积分与积分变量无关，所以上式又可写为：

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(-x)dx,$$ 因得：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

$$+\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]dx$$

当$f(x)$为奇函数时，按定义即$f(-x)=-f(x)$，代入上式有：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[-f(x)+f(x)]dx = 0$

当$f(x)$为偶函数时，按定义即$f(-x)=f(x)$，代入上式有：

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(x)]dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

例如 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = 0$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 2\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

$$=2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi$$

公式（4）、（5）很有用，尤其是在计算重积分时，富氏级数时就更为显著。读者可以把它记住。

作 题 指 示

注意1　在用定积分变量置换定理时，只要求$x=\varphi(u)$为单值。但并没有要求为单调。例如

计算$\int_0^1 x\sqrt{4+5x}$之值

设$4+5x=u^2$，则$x=\frac{u^2-4}{5}$，这个函数在[2, 3]上是单值。如图14-26右半边。

x	0	1
u	2	3

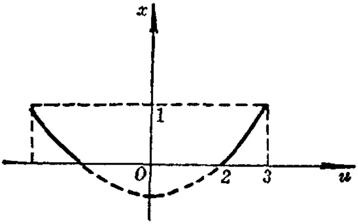


图 14-26

所以 $$\int_0^1 x\sqrt{4+5x}\,dx=\int_2^3\frac{u^2-4}{5}\sqrt{u^2}\,\frac{2}{5}u\,du$$

因$u>0$，$\sqrt{u^2}=u$

所以 $$\int_0^1 x\sqrt{4+5x}\,dx=\frac{2}{25}\int_2^3(u^2-4)u^2\,du$$

$$=\frac{2}{25}\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{4}{3}u^3\right]_2^3=\frac{506}{375}$$

但我们也可以取图14-26左半边，则$x=\frac{u^2-4}{5}$在[-3，-2]上，仍为单值。

x	0	1
u	-2	-3

，因此时 $u<0$，所以 $\sqrt{u^2}=-u$

所以
$$\int_0^1 x\sqrt{4+5x}\,dx=\int_{-2}^{-3}\frac{u^2-4}{5}\sqrt{u^2}\,\frac{2}{5}u\,du$$
$$=\frac{2}{25}\int_{-2}^{-3}(u^2-4)(-u)(u)\,du$$
$$=\frac{2}{25}\int_{-3}^{-2}(u^2-4)u^2\,du=\frac{506}{375}。$$

注意 2　并不是所有的定积分，可以不加考虑的任意作变换。

例如在
$$\int_0^3 y\sqrt[3]{1-y^2}\,dy$$
中，就不能用$y=\sin u$来作置换。这是因为$|\sin u|\leqslant 1$，而 y 与 u 的关系如表所示。

y	0	3
u	0	?

注意 3　在作定积分的变量置换时，我们不常用$x=\varphi(u)$，而是用它的反函数$u=\psi(x)$，如在注意 1 中的例题。实际上，并不是用 $x=\frac{u^2-4}{5}$作置换，而是用 $u^2=4+5x$作置换。因此，我们就要注意$u=\psi(x)$的反函数 $x=\varphi(u)$要合乎我们定理中的条件。也就是说，要求$\varphi(u)$为单值，且$\varphi'(u)$为连续。为了保证这一条件的成立，那就必须要求在

$[a, b]$上$u=\psi(x)$是单调，且$\psi'(x)\neq 0$。如果不注意这些条件，在计算中就会发生错误。例如：

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3-(-1)^3}{3} = 3$$

这是千真万确的事实。

但若没有考虑上面所提的条件，而用$u=x^2$，则$2xdx=du$ 作变换则有：

x	-1	2
u	1	4

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{4}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_{1}^{4} = \frac{7}{3}$$

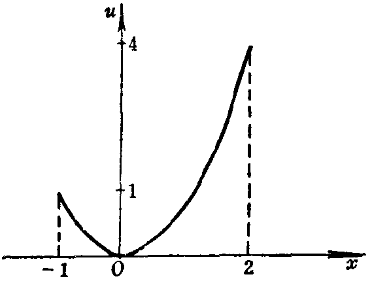


图 14-27

这个结果是错的。毛病出在什么地方？仔细观察，就是因为$u=x^2$在$[-1,2]$上，不是单调函数的缘故（图 14-27）。

但是如果采用下面的步骤，则错误可得纠正。即将定积分分段考虑，如：

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{2} x^2 dx$$

因$u=x^2$在$[-1, 0]$上为单调（图14-27左侧），

x	-1	0
u	1	0

而$u=x^2$在[0, 2]上也是单调（图14-27右侧），

u	0	2
x	0	4

所以$\int_{-1}^{2} x^2 dx=\int_{-1}^{0} x^2 dx+\int_{0}^{2} x^2 dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{0} -\frac{u}{\sqrt{u}}du+\frac{1}{2}\int_{0}^{4}\frac{u}{\sqrt{u}}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{0}(-\sqrt{u})du+\frac{1}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{u}\,du$$

$$=-\frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_{1}^{0}+\frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_{0}^{4}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4\times 2}{3}=3$$

习　题　14-4

（1）利用分部积分法计算下列各定积分：

1）$\int_{0}^{1} xe^{-x}dx$；　　　2）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$；

3) $\int_1^e \ln^3 x dx$；　　　4) $\int_0^1 x\mathrm{arctg} x dx$；

5) $\int_0^1 \arcsin x dx$；　　　6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin 2x dx$；

7) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$；　　　8) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$；

9) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x dx$。

答：1) $1-\frac{2}{e}$；　　　2) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$；

3) $6-2e$；　　　4) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$；

5) $\frac{\pi}{2}-1$；　　　6) $\frac{2}{13}\left[e^{\frac{3\pi}{2}}+1\right]$；

7) $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$；　　　8) π；　　　9) 4π。

(2) 利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$ 的结果[即本段公式(2)]，计算下列各定积分：

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x dx$，　2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 x dx$，3) $\int_0^{\pi}(1-\cos x)^4 dx$。

答：1) $\frac{8}{15}$，　2) $\frac{7\times5\times3\times1}{8\times6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2}\approx0.429$，

3) 提示：利用半角公式作变换，并相应地更换上

下限。$\dfrac{35\pi}{8}$。

（3）利用变量置换法，同时对应地变换上下限。计算下列各定积分：

1）$\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$；　　2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x dx$；

3）$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$；　　4）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$；

5）$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\ dx$；　　6）$\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$；

7）$\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$；　　8）$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；

9）$\displaystyle\int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\,dy$；　　10）$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$；

11）$\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$；　　12）$\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$；

13）$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$；　　14）$\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\,dx$。

答：1）$4-\ln 9$；　　2）$\dfrac{1}{3}$；

3）$\dfrac{3\pi}{8}$；　　4）$\dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$；

5）$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　　6）$\dfrac{\pi}{6}$；

7) $2(\sqrt{3}-1)$；

8) $\mathrm{arctg}e-\frac{\pi}{4}$；　　9) $\frac{\pi}{16}$；

10) $\frac{1}{6}$；　　11) $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$；

12) $\frac{\pi a^4}{16}$；　　13) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$；

14) 提示：$\sqrt{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx+\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\left(-\cos\frac{x}{2}\right)dx$

$=4\sqrt{2}$。

(4*) 求 $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=?$

提示：先令$\ln x=u$，则积分化为：

$$\int_{0.5}^{1}\frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

再令$u=\sin^2 v$，则积分又化为：

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin v\cos v dv}{\sin v\cos v}=\frac{\pi}{2}$$

(5*) 试用一个线性变换将积分 $\int_a^b f(x)dx$ 变 成具有指定上下限 α 、β 的一个积分；

提示：令$x=m\xi+n$　因

x	a	b
ξ	α	β

所以有方程组$\begin{cases} a = m\alpha + n \\ b = m\beta + n \end{cases}$

解之得：

$$m = \frac{b-a}{\beta-\alpha}, \qquad n = \frac{a\beta - b\alpha}{\beta - \alpha},$$

又∵ $$dx = md\xi$$

所以代入积分后，再把积分变量ξ重新换为x，就得到

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{b-a}{\beta-\alpha}x + \frac{a\beta-b\alpha}{\beta-\alpha}\right)dx。$$

§5 定积分的近似计算

在实际问题中会碰到"不可积"或原则上可积，但实际上并不容易积的一类积分。例如，概率积分

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-t^2}dt \quad (a > 0)$$

椭圆积分 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \quad (k^2 < 1)$$

等。这时就需要寻求定积分近似值的方法。这个方法的原则是利用定积分的几何意义（即把定积分看作曲边梯形的面

积）。把原来的曲边梯形换为另一些较为简单的矩形、梯形或简单的曲边梯形面积来代替。于是得到了定积分的近似值。下面我们介绍三种常用的方法。

（一）矩形法

设$f(x)$是在区间$[a, b]$上连续的函数。于是定积分$\int_a^b f(x)dx$一定存在。我们首先考虑到它的值，可以用曲边梯形面积的大小来代表。再次利用引出定积分概念本身的那一想法，可以把整个图形分成若干小条（图 14-28）。比方说，有同一宽度（图14-30）

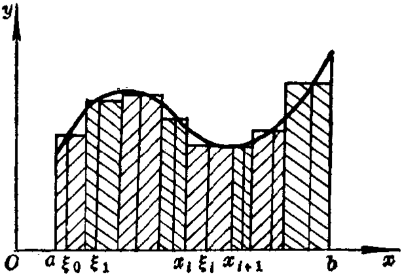


图 14-28

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

的小条，然后用矩形近似的代替每一个小条，而取它的某一个纵坐标作为矩形的高。这使我们得到公式

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_{n-1})]$$

其中$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$（$i=0$，1，…，$n-1$）。这里所求曲边梯形的面积就被某一个由矩形组成的台阶图形所代替。这个近似公式就叫做矩形公式：

在实际上通常取

$$\xi_i=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}=x_{i+\frac{1}{2}}$$

而与它对应的纵坐标

$$f(\xi_i)=f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

简写为 $y_{i+\frac{1}{2}}$（图14-29）

于是公式改写为：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}}\right) \qquad (1)$$

但也有时就用分点作ξ_i，即$x_i=\xi_i$（图 14-30）。于是有公式

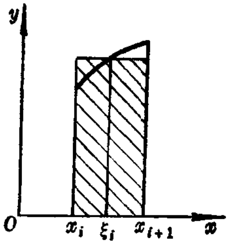


图 14-29

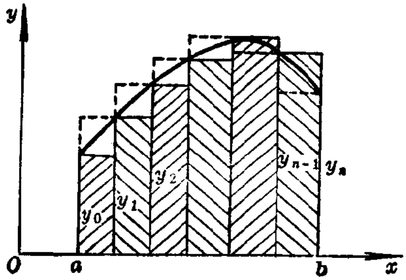


图 14-30

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}] \qquad (1)'$$

或 $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1+y_2+\cdots+y_n] \qquad (1)''$$

一般地讲来，公式（1）要比公式（1）′或（1）″好些。但是，公式（1）的计算工作量也要大一些。

例 求$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$的近似值

把区间分为10等分，计算到小数四位。

今用公式（1）列表如下：

y的足标	x	x^2	$1+x^2$	$y=\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{2}$	0.05	0.0025	1.0025	0.9975
$\frac{3}{2}$	0.15	0.0225	1.0225	0.9780
$\frac{5}{2}$	0.25	0.0625	1.0625	0.9412
$\frac{7}{2}$	0.35	0.1225	1.1225	0.8909
$\frac{9}{2}$	0.45	0.2025	1.2025	0.8316
$\frac{11}{2}$	0.55	0.3025	1.3025	0.7677
$\frac{13}{2}$	0.65	0.4225	1.4225	0.7030
$\frac{15}{2}$	0.75	0.5625	1.5625	0.6400
$\frac{17}{2}$	0.85	0.7225	1.7225	0.5806
$\frac{19}{2}$	0.95	0.9025	1.9025	0.5256
合计				7.8560

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{7.8560}{10} = 0.78560$$

拿这个结果与真值

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0)$$

$$= \frac{\pi}{4} = 0.785398\cdots$$

比较，我们看出已准确到小数第三位。当然对于这个例子没有必要用近似计算。因为它的真值很容易得到。我们选它作例子是为了便于比较准确度的缘故。

（二）梯形法

从几何上的考虑很自然地会引出另一个常常应用的近似公式。用连接曲线上的点（x_i、y_i）的折线来代替曲线。其中 $y_i = f(x_i)$，（$i=0, 1, 2, \cdots, n$）。于是在曲线下的图形就由一系列梯形组成的图形所代替（图14-31）。如果把区间［a，b］分成相等的若干部分，则这些梯形的面积就是：

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0+y_1}{2}, \quad \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_1+y_2}{2}, \quad \cdots,$$

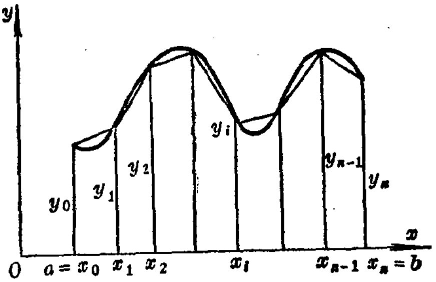


图 14-31

$$\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$（图14-32）。

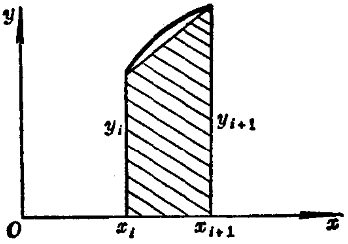


图 14-32

把它们加起来，我们得到新的近似公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right) \quad (2)$$

仍以$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$为例，将区间[0，1]分为十等分，计算到小数第四位。

用公式（2）列表如下：

所以 $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10}(7.8498)=0.78498$$

与真值比较，也是准确到小数三位。

y的足标	x	x^2	$1+x^2$	$y=\frac{1}{1+x^2}$	梯 形 公 式
0	0.0	0.00	1.0000	1.0000	$\frac{1}{2}y_0=0.500$
1	0.1	0.01	1.01	0.9901	$y_1=0.9901$
2	0.2	0.04	1.04	0.9615	$y_2=0.9615$
3	0.3	0.09	1.09	0.9174	$y_3=0.9174$
4	0.4	0.16	1.16	0.8621	$y_4=0.8621$
5	0.5	0.25	1.25	0.8000	$y_5=0.8000$
6	0.6	0.36	1.36	0.7353	$y_6=7353$
7	0.7	0.49	1.49	0.6711	$y_7=0.6711$
8	0.8	0.64	1.64	0.6098	$y_8=0.6098$
9	0.9	0.81	1.81	0.5525	$y_9=0.5525$
10	1.0	1.00	2.00	0.5000	$\frac{1}{2}y_{10}=0.2500$
合		计			7.8498

（三）抛物线法（又名辛普森法）

跟以前一样，把区间[a，b]分成n个相等的小段。不过这时要假定n是个偶数（$n=2m$），把曲线$y=f(x)$上对应于区间[x_0，x_2]，[x_2，x_4]，…，[x_{2m-2}，x_{2m}]，弧段换为其轴平行于y轴的抛物线弧段(图14-33)。今以区间[x_0，x_2]为例说明（图 14-34）。因此时抛物线轴平行于y轴。故可

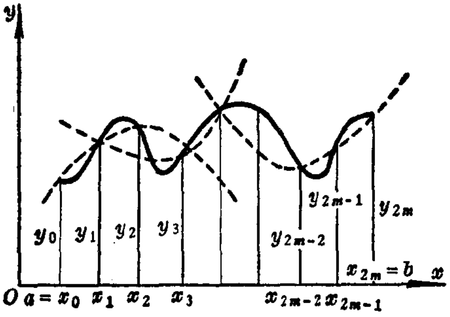


图 14-33

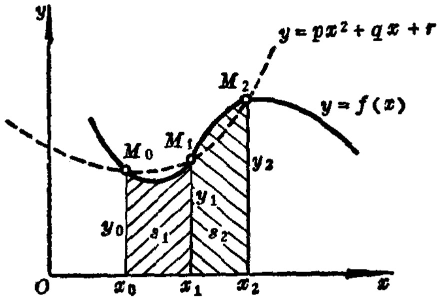


图 14-34

设此抛物线的方程为：

$$y=px^2+qx+r$$

又因此抛物线过曲线上三点（过三定点，抛物线可完全确定）。今设此三点为：

$$M_0(x_0,\ y_0),\ M_1(x_1,\ y_1),\ M_2(x_2,\ y_2)。$$

所以将此三点的坐标代入抛物线中必适合。故有：

$$\left.\begin{aligned} y_0&=px_0^2+qx_0+r\\ y_1&=px_1^2+qx_1+r\\ y_2&=px_2^2+qx_2+r \end{aligned}\right\}$$

又设 S_1，S_2 分别是曲线（实线）下，$x_0M_0M_1x_1$ 与 $x_1M_1M_2x_2$ 的面积，则

$$S_1+S_2\approx\int_{x_0}^{x_2}(px^2+qx+r)dx$$

$$=\frac{1}{3}p(x_2^3-x_0^3)+\frac{1}{2}q(x_2^2-x_0^2)+r(x_2-x_0)$$

$$=\frac{1}{6}(x_2-x_0)[2p(x_2^2+x_2x_0+x_0^2)$$

$$+3q(x_2+x_0)+6r]$$

$$=\frac{1}{6}(x_2-x_0)\{(px_0^2+qx_0+r)$$

$$+[p(x_0+x_2)^2+2q(x_0+x_2)+4r]$$

$$+(px_2^2+qx_2+r)\}$$

因 $x_1-x_0=x_2-x_1=\Delta x$

所以 $x_2-x_0=2\Delta x$，$x_2+x_0=2x_1$，代入上式中有：

$$S_1+S_2\approx\frac{1}{3}\Delta x[(px_0^2+qx_0+r)$$

$$+4(px_1^2+qx_1+r)+(px_2^2+qx_2+r)]$$

由前边y_0、y_1、y_2三式可得：

$$S_1+S_2\approx\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)\Delta x$$

同理 $$S_3+S_4\approx\frac{1}{3}(y_2+4y_3+y_4)\Delta x$$

……………………

……………………

$$S_{2m-1}+S_{2m}\approx\frac{1}{3}(y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m})\Delta x$$

因得：

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{1}{3}[y_0+y_{2m}+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2m-1})$$

$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2m-2})]\Delta x \qquad (3)$$

今仍以$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$为例，取$n=10$，计算到小数4位，此时式（3）化为：

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{1}{3}[y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]\Delta x$$

现列表如下：

y的足标	x	x^2	$1+x^2$	$y=\frac{1}{1+x^2}$	抛物线公式
0	0.0	0.00	1.00	1.0000	$y_0=1.0000$
1	0.1	0.01	1.01	0.9901	$4y_1=3.9604$
2	0.2	0.04	1.04	0.9615	$2y_2=1.9230$
3	0.3	0.09	1.09	0.9174	$4y_3=3.6196$
4	0.4	0.16	1.16	0.8621	$2y_4=1.7242$
5	0.5	0.25	1.25	0.8000	$4y_5=3.2000$
6	0.6	0.36	1.36	0.7353	$2y_6=1.4706$
7	0.7	0.49	1.49	0.6711	$4y_7=2.6844$
8	0.8	0.64	1.64	0.6098	$2y_8=1.2196$
9	0.9	0.81	1.81	0.5525	$4y_9=2.2100$
10	1.0	1.00	2.00	0.5000	$y_{10}=0.5000$
合计					23.5618

所以$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}(23.5618)=0.785393$

与真值比较，前五位全为正确。

但对这个题若取$n=4$，就可达到前四位小数准确。今列表如下：

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}(9.4248)=0.7854$$

由上面三个方法，我们看出用矩形法与梯形法，其结果大约具有相同的精确度。

此题矩形法比真值大0.000222；梯形法比真值小0.000418；总之，它们的误差<0.0005。

y的足标	x	x^2	$1+x^2$	$y=\frac{1}{1+x^2}$	抛物线公式
0	0	0	1.0000	1.0000	$y_0=1.0000$
1	0.25	0.0625	1.0625	0.9412	$4y_1=3.7648$
2	0.50	0.2500	1.2500	0.8000	$3y_2=1.6000$
3	0.75	0.5625	1.5625	0.6400	$4y_3=2.5600$
4	1.00	1.0000	2.0000	0.5000	$y_4=0.5000$
合		计			9.4248

但用抛物线法，并不比用梯形法与矩形法麻烦。可是其结果却更精确。在理论上也确能证明当$\Delta x\to 0$时，矩形公式与梯形公式的误差均是Δx的二阶无穷小。而抛物线 公式的误差则是四阶无穷小。这就是一般地说来，抛物线法比前两个方法要精确些的理论根据。

$$矩形法的误差=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi),\ a\leqslant\xi\leqslant b$$

$$=\frac{1}{24}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(b-a)f''(\xi)$$

$$=\frac{1}{24}\Delta x^2(b-a)f''(\xi)$$

若$|f''(\xi)|\leqslant M_2$，则误差$\leqslant\frac{\Delta x^2}{24}(b-a)M_2$

$$梯形法的误差=\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta),\quad a\leqslant\eta\leqslant b$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2(b-a)f''(\eta)$$

$$=\frac{1}{12}(\Delta x)^2(b-a)f''(\eta)$$

若$|f''(\eta)|\leqslant M_2$，则误差$\leqslant\frac{\Delta x^2}{12}(b-a)M_2$

抛物线法的误差$=\dfrac{(b-a)^5}{180(2n)^4}f^{(4)}(\zeta)$， $a\leqslant\zeta\leqslant b$

$$=\frac{1}{180}\left(\frac{b-a}{2n}\right)^4(b-a)f^{(4)}(\zeta)$$

$$=\frac{1}{180}\Delta x^4(b-a)f^{(4)}(\zeta)$$

若 $|f^{(4)}(\zeta)|\leqslant M_4$，则误差$\leqslant\dfrac{\Delta x^4}{180}(b-a)M_4$

关于证明见菲赫金哥尔茨著：微积分学教程第二卷一分册第九章P150～154。

习　题　14-5

1.用矩形法的公式(1)′求$\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x}$的近似值（分十等分计算到小数五位）答：0.71877。

2.用梯形法，计$\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x}$的近似值（分十等分计算到小数五位）答：0.69377。

3.用抛物线法，计算$\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x}$的近似值（分十等分计算到小数五位）答：0.69315(真值ln2＝0.6931472)。

4.用辛普森法（即抛物线法）把区间[0，1]分成十个相等的小区间，计算定积分（计算到小数三位）。

a） $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^3}\,dx$，　　b） $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,dx$

的近似值。

a ）的提示：$\sqrt{0.999}\approx 0.9995$，$\sqrt{0.784}\approx 0.8854$，

$\sqrt{0.992}\approx 0.9960$，$\sqrt{0.657}\approx 0.8106$，

$\sqrt{0.973}\approx 0.9864$，$\sqrt{0.488}\approx 0.6986$，

$\sqrt{0.936}\approx 0.9675$，$\sqrt{0.271}\approx 0.5206$，

$\sqrt{0.875}\approx 0.9354$，

答：a ）0.837，b ）1.089。

关于定积分的概念及其计算讲到这里，暂告一段落。下面是一些具有总结性的、有关概念的思考问题。读者可借以检查自己的学习情况。

思　考　问　题

1.你能不用具体计算而证m $\int_{-5}^{5}\frac{x^2\sin x}{x^4+2x^2+1}dx=0$吗？

2.说明$\int_{-a}^{a}\phi(x^2)dx=2\int_{0}^{a}\phi(x^2)dx$。

3.如果$a\neq b$，而$\int_{a}^{b}f(x)dx=0$,在几何上 你如何解释？

4.$\int_{a}^{b}0dx=$？

5.利用$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x}f(t)dt=f(x)$，问$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}dt=$？

6.$\int_{a}^{b}udv=[uv]_a^b+$(　　　)。

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = (?\ ) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx$。

8. 若用$x=\phi(u)$对定积分$\int_a^b f(x)dx$作变量置换，且$\phi(\alpha)=a$， $\phi(B)=b$，问

$$\int_a^b f(x)dx=\int_?^? f[\phi(u)]\phi'(u)du$$

9. $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=(?\ )\int_0^? \cos^2\theta d\theta$

10. 定积分的近似计算所用的原理如何？为什 么 辛普森法中要把积分区间分成偶数个小区间？

§6 广 义 积 分

我们从研究有限范围的有界函数变化规律的过程中建立了定积分的概念。因而对于定积分这一概念必须有这样的要求：

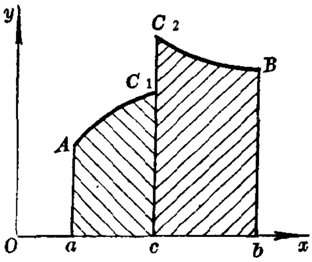


图 14-35

1 ）积分区间$[a、b]$是有限的。

2 ）被 积 函 数 在 区 间 $[a, b]$上有界。

至于被积函数在个别点处具有第一类间断点，并没有超出上面的要求。因 函 数 $f(x)$

在 $x=c$ 是间断点时，在区间$[a,b]$上的积分可化为两个部分区间$[a, c]$和$[c, b]$上的积分之和（图14-35）❶

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

从图形14-35上看来，函数从 a 到 b 的积分所表示的面积，显然是两个曲边梯形$AacC_1$及C_2cbB的面积之和。因此，不必进行新的推广。

可是，在研究实际问题时，有时不但不在有限范围内进行，而且在变化的过程中函数也不一定有界。因此，为了更好地反映自然界一些事物的规律，并解决实际问题，就有必要将定积分的概念从上述两条限制中解放出来。把定积分的定义进行推广，于是建立下面的两种广义积分：

（一）积分区间是无限大的广义积分

让我们考虑质点引力场的问题。设在坐标原点处放一个质量为m的质点。并设在任何其他点处有质量为 1 的质点。于是在全部空间内就有一个向坐标原点的引力场。根据牛顿定律，这引力的大小为：

$$\frac{km}{r^2}$$

k 为比例常数，r 为该质点到坐标原点的距离，

即 $$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$ ❷

---

❶ 在区间$[a, c]$和$[c, b]$的端点c处，分别取左极限$\lim\limits_{x\to c^-}f(x)$及右极限$\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$为函数值，使得函数在这两个区间上都连续。

❷ 设该点的坐标为$(x、y、z)$，原点坐标为$(0, 0, 0)$，则该点到原点的距离$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，此处$d=r$。公式的得来是用勾股定理，证明将在空间解析几何章中讲解。

设质点P从点P_0处沿直线OP_0向外移动至点P_1处，则质点反抗引力所作之功为：

$$\int_{r_0}^{r_1}\frac{kmdr}{r^2}=km\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right)$$

式中r_0为距离$|OP_0|$，$r_1=|OP_1|$。若令$r_1\to+\infty$，即点P_1移到无穷远处。则质点反抗引力所作的功应为：

$$\lim_{r_1\to+\infty}km\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)=\frac{k_m}{r_0}$$

这个值称为质点在P_0处的**势能**，或简称为**势**。因此，在质点引力场中每一点有唯一的势。这些值在引力场中决定一个函数$\frac{km}{r}$，称为引力场中的**势函数**（**或位函数**）。同样，在点电荷场中的电位，也用同样的方法来确定。

定义　**设函数$f(x)$在$a\leqslant x<+\infty$上连续，则对任意一区间$[a,\xi]$，$\xi>a$，定积分是存在的。其值是ξ的函数$F(\xi)$**

即
$$F(\xi)=\int_a^{\xi}f(x)dx$$

若$\lim\limits_{\xi\to+\infty}F(\xi)$**存在，则称此极限为在区间$[a,+\infty)$上函数$f(x)$的广义积分❶之值**，并记为：

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi}f(x)dx$$

有时又把存在的广义积分称为**收敛的**。

如果$\lim\limits_{\xi\to\infty}F(\xi)$不存在，就说广义积分

---

❶ 有的书上称为旁义积分。

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

是不存在的，或称为**发散的**。

完全类似的定义

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{\eta \to -\infty}\int_{\eta}^{a} f(x)dx \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

最后一式只有等式右端两个广义积分同时收敛时，左端广义积分才是收敛的，而且容易看出右边式子的定义与 a 的选择无关。

例 1 判断广义积分

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

是否收敛。如果收敛，其值如何？

解 由定义 $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \to +\infty}\int_{0}^{\xi} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg}\xi = \frac{\pi}{2}$$

因此，这个广义积分是收敛的，其值为$\frac{\pi}{2}$。几何意义是这样的：正 y 轴，正 x 轴，以及曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$所包围的区域虽然是无界的，但其面积却是有限数（图14-36）。

例 2 判断$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$是否收敛

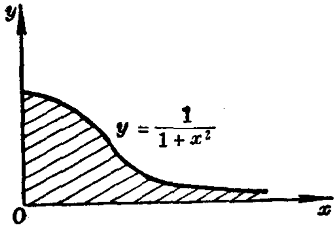


图 14-36

解 因 $\lim_{\xi\to+\infty}\int_1^{\xi}\frac{dx}{x}=\lim_{\xi\to+\infty}[\ln x]_1^{\xi}=\lim_{\xi\to+\infty}\ln\xi$ 不存在，故 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$为发散。

例 3 证明广义积分$\int_{-\infty}^{0}\sin x dx$是发散的

解 因 $\int_{\eta}^{0}\sin x dx=-\cos x\Big|_{\eta}^{0}=\cos x\Big|_{0}^{\eta}=\cos\eta-1$

当$\eta\to-\infty$时，$\cos\eta$是没有极限的，所以它是发散。

（二）无界函数的广义积分

设函数$y=f(x)$，在区间$[a, b)$上连续，但$\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$，任取正数$\varepsilon$，当$\varepsilon<b-a$，则函数$y=f(x)$在闭区间$[a, b-\varepsilon]$上连续。于是定积分

$$F(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

是存在的。

定义 **若当$\varepsilon\to0^+$，$F(\varepsilon)$趋于一确定极限值，则称此**

极限为广义积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

之值，也就是

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

若当 $\varepsilon\to 0^+$，$F(\varepsilon)$ 没有极限，则称广义积分无意义或发散。

同样，若函数 $y=f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续，但 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$。如果

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

的右边极限存在，则称此广义积分为收敛；如果极限不存在，则称为发散的。

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内除去 c 点外是连续的。即 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$，如果下式右边两个极限均存在，则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx$$

为收敛的。

亦即 $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

否则，若右边的两个极限均不存在，或者有一个不存在，则此广义积分为发散的。

例 计算$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$之值

解 被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$在 $x=a$ 处 不 连 续（图 14-37），即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，为广义积分。

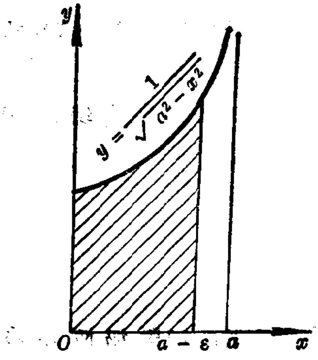


图 14-37

取 $\varepsilon>0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^{a-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{a-\varepsilon}{a}$$

$$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

所以 $$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}$$

作　题　指　示

关于广义积分的计算，有时要用到一些技巧，同时对于它的一些写法上也要特别注意。现在我们通过三个例题的演算来说明如下：

例 1 问$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$为收敛，还是发散？

解 当 $x=0$时，函数$f(x)=\frac{1}{x^2}$不连续（图14-38）。

所以这个积分是广义积分。现取 $\varepsilon > 0$，因

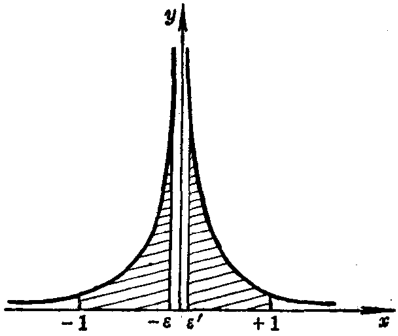


图 14-38

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] = \infty$$

$\therefore \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$为发散。

此题形式与普通的定积分没有什么区别，但若不加任何考虑，就把$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$当成常义的积分看待。就有：

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{1} = [-1-1] = -2$$

于是得到了一个错误的结果，希读者特别注意。

例 2 求$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x} dx$的不定积分

解 这里被积函数xe^{-x}在全部x轴上是连续的，但是上限趋向$+\infty$。为此先把定积分

$$\int_0^{\xi} xe^{-x}dx$$

算出。即$\int_0^{\xi} xe^{-x}dx=1-\frac{1+\xi}{e^{\xi}}$

然后令$\xi\to+\infty$，取极限得

$$\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi} xe^{-x}dx=\lim_{\xi\to+\infty}\left(1-\frac{1+\xi}{e^{\xi}}\right)=1$$

这是因为$\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{1+\xi}{e^{\xi}}=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{(1+\xi)'}{(e^{\xi})'}=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{1}{e^{\xi}}=0$的缘故。

所以

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=1$$

注意 在计算$\int_a^{+\infty} f(x)dx$时，当没有肯定$\lim\limits_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi} f(x)dx$存在之前，不能写为：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi} f(x)dx$$

因为根据定义，只有当$\int_a^{\infty} f(x)dx$存在时，才有：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi} f(x)dx$$

例 3 求 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$的不定积分

解 函数$\frac{1}{\cos^2 x}$在点$x=\frac{\pi}{2}$处没有意义。因

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}=\infty,$$

虽然如此，但$\frac{1}{\cos^2 x}$在$\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right]$上都是连续的。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\operatorname{tg} x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+1\right]=\infty$$

所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos^2 x}$不存在，于是根据定义：

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$说没有意义，因此

$\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon'}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$也就不必再去计算它了。

所以开始作题时，不能写为：

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos^2 x} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon'}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

因为根据定义，只有右端两个极限存在时，等式才能成立。

思 考 问 题

在下列积分中，哪几个是广义积分?

1) $\int_0^{\infty} x\sin x dx$;　　2) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$;

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$;　　4) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$;　　6) $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{\sqrt[7]{x^6}}$。

习 题 14-6

(1)计算下列各广义积分

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$;　　2) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;　　4) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

5) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;　　6) $\int_0^5 \frac{dx}{x-3}$;

7）$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$。

答：1）$\frac{\pi}{4}$；　　2）$\frac{1}{2}$；

3）发散；　　4）$\frac{8}{3}$；

5）$\frac{\pi}{2}$；　　6）发散；

7）发散。

（2）计算下列各广义积分

1）$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$；　　2）$\int_0^{+\infty} \sin x dx$；

3）$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$；　　4）$\int_0^{+\infty} x\sin x dx$；

5）$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$；　　6）$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$；

7）$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$；　　8）$\int_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

9）$\int_1^{+\infty} \frac{\text{arctg}\, x}{x^2}dx$；　　10）$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$；

11）$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$。

答：1）1；　　2）发散；

3）1；　　4）发散；

5 ） 提示：

先变为 $\int_{0}^{+\infty}\frac{dt}{1+2t^2}+\int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

6 ） $\arcsin\frac{1}{2}$； 7 ） 2；

8 ） $\ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$； 9 ） $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln 2}{2}$；

10 ） $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$； 11 ） $\frac{\pi}{2}$。

（ 3 ）计算下列各广义积分

1 ） $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$； 2 ） $\int_{0}^{1}\ln x dx$；

3 ） $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$； 4 ） $\int_{-2}^{2}\frac{2xdx}{x^2-1}$；

5 ） $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$； 6 ） $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$。

答：1 ） $\frac{\pi}{2}$； 2 ） -1；

3 ） 发散； 4 ） 发散；

5 ） π； 6 ） 发散。

§7 广义积分判敛法，Γ 函数，β 函数

在前一节中判断广义积分是否为收敛的方法是通过求被积函数的原函数。然后考虑其极限是否存在。但是我们知道不少函数

的原函数是不能用初等函数表示出来的。因此，前节的判断方法受到了很大的限制。而且在解决实际问题时，往往只需要判断广义积分是否收敛；至于计算收敛广义积分之值，可以用近似计算或其他的方法而求得。因此在这一节中，讲一讲判断广义积分的收敛、发散的方法。同时，在这一段中也介绍一下Γ函数、β函数。这两种函数在工程上也是常常会遇到的。

（一）广义积分的判敛法

下面我们仅就$f(x)\geqslant 0$情况讨论。其方法是建立在"比较"原则上，和"单调有界必有极限"的原则上。

（1）积分区间是无穷情形的判敛法

预备定理1　广义积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^m},\ a>0$$

当$m>1$是收敛的，当$m\leqslant 1$是发散的。

证　由于

$$\int_a^{\xi}\frac{dx}{x^m}=\begin{cases}\ln x\big|_a^{\xi}=\ln\xi-\ln a, & 当m=1\\[2mm] \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{x^{m-1}}\Big|_a^{\xi}=\dfrac{1}{1-m}\left(\dfrac{1}{\xi^{m-1}}-\dfrac{1}{a^{m-1}}\right), & 当m\neq 1\end{cases}$$

因此　当$m>1$，广义积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^m}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{1-m}\left(\frac{1}{\xi^{m-1}}-\frac{1}{a^{m-1}}\right)=\frac{1}{m-1}\ \frac{1}{a^{m-1}}\ 收敛$$

当$m\leqslant 1$，

$$\lim_{\xi\to+\infty}\int_a^{\xi}\frac{dx}{x^m}=+\infty$$发散，所以此时广义积分不存在。

定理 1　设函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\geqslant 0$，$a>0$，若存在一个$M>0$。

1）**当$m>1$，使在$[a,+\infty)$上恒有$f(x)\leqslant\dfrac{M}{x^m}$成立，则广**

义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛。

2）**当$m\leqslant 1$，使在$[a, +\infty)$上恒有$f(x)\geqslant\frac{M}{x^m}$成立，则广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。**

证 因$f(x)\geqslant 0$，所以$\int_a^{\xi} f(x)dx$ 当$\xi\to+\infty$时，是单调递增函数。关于这一点很容易由图14-39的直观得到。因为$\int_a^{\xi} f(x)dx$可用图中阴影表示。当ξ向右移动时，曲边梯形面积自然逐步增大，所以有

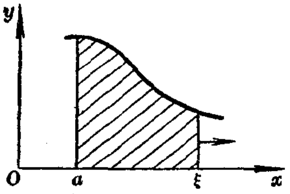


图 14-39

$$\int_a^{\xi} f(x)dx\leqslant M\int_a^{\xi}\frac{dx}{x^m}<M\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$$

但由预备定理知$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$，当$m>1$时为收敛，所以它小于或等于某一正的常数。设此常数为

$$A>0，则\int_a^{\xi} f(x)dx<MA$$

这说明$\int_a^{\xi} f(x)dx$既为单调并且有界。所以它一定有极限存在，至此第一部分得证。

现在证第二部分，由假设与定积分性质有：

$$\int_a^{\xi} f(x)dx\geqslant M\int_a^{\xi}\frac{dx}{x^m}$$

又由假设 $m\leqslant 1$ 及预备定理知 $\int_a^\xi \frac{dx}{x^m}\to+\infty$,

$\therefore \int_a^\xi f(x)dx\to+\infty$,至此定理全部证明完毕。

例 1 试证 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 是收敛的

证 因 e^{-x^2} 为偶函数，故 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$，因此若 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 为收敛,则 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 亦必收敛。

又因 $e^{-x^2}=\frac{1}{e^{x^2}}$ 但 $x^2<e^{x^2}$ 是显然的，$\therefore e^{-x^2}<\frac{1}{x^2}$ 此时 $M=1, m=2>1$，由定理1知 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 是收敛的,而 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 是常量，

$$故\quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

是收敛的。因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 也是收敛的。

例 2 判断广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}是否收敛?$$

解 显然 $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}<\frac{1}{x^2}$,

由定理 1 知，此广义积分为收敛。这是因为广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 为收

敛，而$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}<\frac{1}{x^2}$的缘故。

例 3 判断广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\text{arctg}x}{\sqrt[8]{x^4+1}}dx$$

当$x\geqslant 1$时的收敛性。

因$\text{arctg}x$为增函数，所以当 $x=1, \text{arctg}1=\frac{\pi}{4}$，当$x>1$时，$\text{arctg}x>\frac{\pi}{4}$，

$$\frac{x\text{arctg}x}{\sqrt[8]{x^4+1}}\geqslant\frac{x\frac{\pi}{4}}{\sqrt[8]{x^4+1}}\geqslant\frac{x\frac{\pi}{4}}{\sqrt[8]{2x^4}}=\frac{\pi}{4\sqrt[8]{2}}\cdot\frac{1}{x^{1/3}}$$

由定理 1 知广义积分是发散的。

关于定理 1 的极限形式，在应用上较定理 1 还方便

定理1′ 设$f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，$f(x)\geqslant 0$。

1）当$m>1$，使$\lim\limits_{x\to+\infty}x^m f(x)=A, A\geqslant 0$，则广义积分收敛；

2）当$m\leqslant 1$，使$\lim\limits_{x\to+\infty}x^m f(x)=A, A>0$，则广义积分发散。

证 由假设知，当x相当大时（即$x>N$）有：

$$|x^m f(x)-A|<\varepsilon$$

即
$$-\varepsilon<x^m f(x)-A<\varepsilon$$

即
$$A-\varepsilon<x^m f(x)<A+\varepsilon$$

即
$$\frac{A-\varepsilon}{x^m}<f(x)<\frac{A+\varepsilon}{x^m}$$

1）现在取右半边不等式，$f(x)<\frac{A+\varepsilon}{x^m}$。

所以当$x>N$时，由定理 1 知$\int_N^{+\infty}f(x)dx$为收敛。

但 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=\int_a^N f(x)dx+\int_N^{+\infty}f(x)dx$ 其中

$\int_{a}^{N} f(x)dx$ 为常义积分，因此 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 为收敛。

2 ）取不等式左半边。

当 $x>N$ 时，$\frac{A-\varepsilon}{x^m}<f(x)$ 恒成立，于是可以如此选取 $M=A-\varepsilon>0$。（因 $A>0$，ε 可任取）由定理 1 知

当 $x>N$ 时，$\int_{N}^{+\infty} f(x)dx$ 为发散。

但 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\int_{a}^{N} f(x)dx+\int_{N}^{+\infty} f(x)dx$，其中

$\int_{a}^{N} f(x)dx$ 为常义积分，所以 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 为发散。

例 4 研究积分 $\int_{1}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 的敛、散性

解 应用定理1′中之 1 ），取 $m=2>1$，$f(x)=x^{\alpha-1}e^{-x}$

则
$$\lim_{x\to+\infty} x^2x^{\alpha-1}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}+1}{e^x}=0$$

这是因为指数函数与幂函数趋向无穷时，指数函数远比幂函数为快的缘故。关于这一点，我们在讲罗彼塔法则时已证明了。当然若 m 取为 3 或 4 等，大于 1 的数，也同样能证明对于一切 α，此广义积分为收敛。但用 2 既然可以了，自然也就不必再取比 2 更大的数了。

在例 3 中若应用定理1′，则证明就更简单些。因当 $x\to+\infty$ 时 $\mathrm{arctg}x$ 就趋于 $\frac{\pi}{2}$，而

$\frac{x}{\sqrt[8]{x^4+1}}$ 与 $\frac{1}{x^{1/3}}$ 为等价无穷小，因此考虑

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{x\text{arctg}x}{\sqrt[8]{x^4+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{arctg}x}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^4}}}=\frac{\pi}{2}$$

由定理1′，$m=\frac{1}{3}<1$，$\frac{\pi}{2}$为一常数，故所给广义积分为发散。

定理 2　若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛。

此时称$\int_a^{+\infty}f(x)dx$为绝对收敛。

我们先从几何意义来说明定理的正确性。

广义积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛的几何意义为：从$x=a$起向右无限延伸，曲线$y=f(x)$与x轴所包围的面积是有限数。这时不论面积处于x轴上或x轴下，一律取为正数。如果只考虑x轴以上的诸面积之和，当然也是有限数；同样，在x轴以下的诸面积之和也是有限数。于是在x轴以上诸面积之和减去在x轴以下诸面积之和，也是有限数，这也就是广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

收敛的意义。

证　先引入两个辅助函数$f^+(x)$及$f^-(x)$，其定义如下：

$$f^+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f^-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2}$$

由此可知，当x为已给定值时，若$f(x)\geqslant 0$，则$f^+(x)=f(x)$；若$f(x)<0$，则$f^+(x)=0$；同样，若$f(x)\leqslant 0$，则$f^-(x)=|f(x)|$；若$f(x)>0$，则$f^-(x)=0$（读者可以考虑一下，若$f(x)$的图形已给，$f^+(x)$与$f^-(x)$的图形如何？）。

这样可得：

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x);\quad f(x)=f^+(x)-f^-(x),$$

于是 $$\int_a^\eta |f(x)|\,dx=\int_a^\eta f^+(x)dx+\int_a^\eta f^-(x)dx;$$

$$\int_a^\eta f(x)dx=\int_a^\eta f^+(x)dx-\int_a^\eta f^-(x)dx,$$

根据所给条件：$\eta\to+\infty$时，$|f(x)|$ 的积分有极限；因此便不难说明第一个等式右边的两个积分也都有极限。这是由于那两个积分都是 η 的增函数。故若其中有一个积分无极限，它也只能趋于 $+\infty$。因而两者之和（就是左边的积分）也不会有极限。它也只能趋于 $+\infty$，而这个是跟所给条件相矛盾的。但若函数 $f^+(x)$及 $f^-(x)$的积分在$\eta\to+\infty$时，有极限。那么，这两个积分差在 $\eta\to+\infty$时，也是有极限的。根据第二个等式，就说明函数$f(x)$的积分在$\eta\to+\infty$时，也收敛的。于是定理得证。

值得注意的是，当$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$发散，广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$却可能是收敛的。这样的收敛广义积分称为**条件收敛**❶。

例 5 试证明广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$是绝对收敛。

解 这是由于当 $x\geqslant 1$，

$$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{1+x^2}}\right|\leqslant\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

再由例 2，故知为绝对收敛。

---

❶ $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，但 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{|\sin x|}{x}dx$却是发散的见菲赫金哥尔茨著“微积分学教程”二卷三分册P·493。

习 题 14-7

判断下列各广义积分的收敛性

1) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{x^5+1}dx$； 2) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{2x^3-1}dx$；

3) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$； 4) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}dx$；

5) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ln x}$； 6) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$；

7) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$； 8) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$；

9) $\int_1^{+\infty}x^k\frac{x+\sin x}{x-\sin x}dx$； 10) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^k\ln x}$；

11) $\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{x-1}dx$； 12) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}dx$；

13) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$。

答：1) 收敛； 2) 收敛； 3) 发散； 4) 收敛； 5) 发散； 6) 收敛； 7) 收敛； 8) 收敛； 9) $k\geqslant-1$时发散，$k<-1$时收敛；10) $k>1$时收敛，$k\leqslant1$时发散； 11) 发散；12) $1<m<2$收敛；13) $p>0$收敛。

(2) 无界函数的判敛法

预备定理 2 广义积分

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^m}$$

1）当$m<1$时是收敛的；

2）当$m\geqslant 1$时是发散的。

证 我们只讨论 $m>0$ 情形，因$m\leqslant 0$时，此积分就是常义积分了。

1）$m<1$，$\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^m}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^m}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{1-m}\ \frac{-1}{(b-x)^{m-1}}\right]_a^{b-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-m}\left[\frac{1}{(b-a)^{m-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\right]$$

$$=\frac{1}{1-m}\ \frac{1}{(b-a)^{m-1}}\text{是收敛的。}$$

2）$m=1$，则 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[-\ln(b-x)]_a^{b-\varepsilon}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]=+\infty\text{发散}$$

$m>1$，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^m}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-m}\left[\frac{1}{(b-a)^{m-1}}-\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\right]$

$$=+\infty\text{是发散的。}$$

至此定理得证。

同理可证

预备定理2′ 广义积分$\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^m}$

1）当$m<1$是收敛的；

2）当$m\geqslant 1$是发散的。（读者自己仿预备定理2证之）

定理 3 设$f(x)$在$[a,b)$上连续，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，并设在$[a,b)$上函数$f(x)\geqslant 0$，若存在一常数$M>0$。

1）当$m<1$，使得在$[a,b)$上恒有：

$$(b-x)^m f(x) \leqslant M, \text{或} \ f(x) \leqslant \frac{M}{(b-x)^m},$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$是收敛的。

2）当$m \geqslant 1$，使得在$[a, b)$上恒有：

$$(b-x)^m f(x) \geqslant M, \text{或} f(x) \geqslant \frac{M}{(b-x)^m}$$

则广义积分 $\int_a^b f(x)dx$发散。

证 1）$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \leqslant \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^m}dx$

$$= \frac{M}{1-m}[(b-a)^{1-m} - \varepsilon^{1-m}] < \frac{M(b-a)^{1-m}}{1-m}$$

所以函数$I(\varepsilon)$是有界的，并且因ε减小时，$I(\varepsilon)$增大。（由于$f(x)$在积分区间上没有负值，图14-40a），故当$\varepsilon \to 0$时，$I(\varepsilon)$有极限。关于第一部分，定理于是得证。

2）若$m > 1$时，当$\varepsilon \to 0$

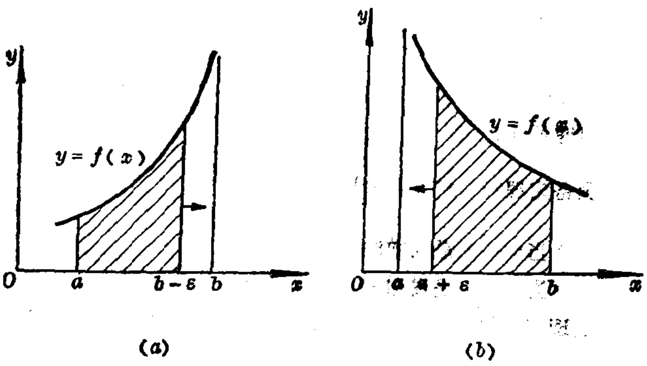


图 14-40

$$I(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \geqslant \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(b-x)^m},$$

$$=\frac{M}{m-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}-\frac{1}{(b-a)^{m-1}}\right)$$

所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)=\infty$

若当 $m=1$ 时

$$I(\varepsilon)\geqslant M\ln\frac{b-a}{\varepsilon} \text{而} \lim_{\varepsilon\to 0} M\ln\frac{b-a}{\varepsilon}=\infty$$

到此关于定理的第二部分也得到证明。

这个定理指出下面的事实：当被积函数在自变量趋于无穷型间断点时，若该函数增大得不太快，因而就保证了积分的收敛性；另一方面，由于函数值增大的足够快时，因而导致积分是发散的。

同理可证：

定理 3′ 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$（图14-40 b）并设在 $(a,b]$ 上函数 $f(x)\geqslant 0$，若存在一个常数 $M>0$。

1）当 $m<1$，使得在 $(a,b]$ 上恒有：

$$(x-a)^m f(x)\leqslant M, \text{ 或 } f(x)\leqslant\frac{M}{(x-a)^m}$$

则广义积分是收敛的。

2）当 $m\geqslant 1$，使得在 $(a,b]$ 上恒有：

$$(x-a)^m f(x)\geqslant M, \text{ 或 } f(x)\geqslant\frac{M}{(x-a)^m}$$

则广义积分是发散的。

例 6 广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[8]{1-x^3}}$ 为收敛

这是因为在全部区间[0，1)上

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt[8]{1-x^3}}\leqslant\frac{1}{(1-x)^{5/6}} \text{的缘故}$$

例 7 $\int_0^1 \frac{dx}{\sin^2(1-x)}$是发散的

这是因为在全部区间 $[0,\ 1)$上$\frac{1}{\sin^2(1-x)} > \frac{1}{(1-x)^2}$

之缘故。

例 8 判断广义积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad k^2 < 1$$

是收敛还是发散。

解 $\because$ $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1-k^2)}}$$

故知为收敛。

关于定理 3 的极限形式，在应用上更为方便。

定理 3″ 设函数在区间 $[a,\ b)$（或$(a,\ b]$）上连续，且没有负值，同时 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$（或 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$）；

若 $\lim\limits_{x\to b^-} (b-x)^m f(x) = A$（或 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^m f(x) = A$），

则 $0<m<1$，且$A>0$时积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

收敛；而在$m \geqslant 1$ 且$A > 0$ 时发散。

证 由假设知，对于任意给定 $\varepsilon > 0$，必存在一个 $\delta > 0$，当 $0 < b-x < \delta$ 时，恒有

$|(b-x)^m f(x) - A| < \varepsilon$，即$A - \varepsilon < (b-x)^m f(x) < A + \varepsilon$

1）用右半边不等式，当 $0<b-x<\delta$ 时有：

$$(b-x)^m f(x)<A+\varepsilon,\ \text{即}\ f(x)<\frac{A+\varepsilon}{(b-x)^m}$$

因$A>0$，取$A+\varepsilon=M>0$，则 $f(x)<\dfrac{M}{(b-x)^m}$

所以当 $0<b-x<\delta$，且 $0<m<1$ 时由定理3知，

$$\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx\text{为收敛。}$$

$$\text{但}\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx+\int_{b-\delta}^{b} f(x)\,dx$$

其中第一个积分为常义积分，所以$\int_a^b f(x)dx$为收敛。

2）取左半边不等式，当 $0<b-x<\delta$ 时有：

$$(b-x)^m f(x)>A-\varepsilon=M>0$$

（因$A>0$，ε 可任取，使$A-\varepsilon>0$ 永能成立）。

即 $$f(x)>\frac{M}{(b-x)^m}\text{。}$$

当 $0<b-x<\delta$ 时，且$m\geqslant 1$，由定理3知

$$\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx\text{为发散。}$$

$$\text{但}\quad \int_a^b f(x)dx=\int_a^{b-\delta} f(x)dx+\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx$$

其中第一个积分为常义积分，所以$\int_a^b f(x)dx$ 为发散。（对应于 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$的情形，证法类同）。

例 9 研究广义积分：$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$的敛散性

解 当$\alpha\geqslant 1$时，这是常义积分。但当 $0<\alpha<1$ 时，又

$x=0$，是被积函数有无穷型间断。取$m=1-\alpha$，于是

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x}=1$$

故当$0<1-\alpha<1$时，即$\alpha>0$时，积分$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx$为收敛。

定理 4　设$f(x)$在$[a,\ b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 若广义积分

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

为收敛，则广义积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 也收敛。此时称后者为绝对收敛。

证　设$f^+(x)$及$f^-(x)$的定义与在定理2中所设相同。于是

$$\int_a^{b-\varepsilon} |f(x)|\,dx=\int_a^{b-\varepsilon} f^+(x)dx+\int_a^{b-\varepsilon} f^-(x)dx;$$

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx=\int_a^{b-\varepsilon} f^+(x)\,dx-\int_a^{b-\varepsilon} f^-(x)\,dx$$

以下的论断就和在定理2中的完全一样，于是便得到结论：

若在$\varepsilon\to 0$时，第一式的左边有极限，则该式右边的两个积分都应有极限。由此可知，第二式右边的两个极限也存在。即第二式左边的积分有极限。因得$\int_a^b f(x)dx$为收敛。于是定理得证。

又当函数绝对值的积分为发散时，函数本身的积分可能收敛，也可能发散。

习　题　14-8

判断下列各广义积分的收敛性

1）$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$；　　2）$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[8]{(1-x^2)^5}}$；

3）$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$；　　4）$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$；

5）$\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$；　　6）$\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^k x}$；

7）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}dx$。

答：1）收敛；　2）发散；　3）收敛；　4）收敛；

5）发散；　6）$k<1$时收敛，$k\geqslant 1$时发散；

7）$m<3$时收敛，$m\geqslant 3$时发散。

（二）Γ函数与β函数

下面我们来简单介绍一下两个含参变量的广义积分——Γ函数与β函数。它们在物理、力学及工程技术问题的研究中都有着广泛的应用。在讲述Γ函数与β函数之前，先来介绍一下含参变量积分的概念。

设$f(x, \alpha)$为含有两个自变量x、α的函数，若在某一个区间$[c, d]$上任意选定α之后，则$f(x,\alpha)$变成了一个在$[a,b]$上的一元函数（x的函数），所以定积分

$$\int_a^b f(x, \alpha)dx$$

就依赖于我们选择的变量α的值。对于每一个固定α值，积分都有一个确定的值。因此，该积分是一个定义在$[c, d]$上的α的函数。记作$F(\alpha)$，即

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)dx \quad (c\leqslant\alpha\leqslant d)$$

其中α在积分过程中是一个常量，通常称为参变量。而积分$\int_a^b f(x,\alpha)dx$称为**含参变量的积分**。

当 x 的积分区间为无穷区间时，（例如$\int_a^{\infty} f(x,\ \alpha)dx$）或被积函数$f(x,\ \alpha)$在$[a,\ b]$上具有无穷型的间断点时，这时积分就称为**含参变量的广义积分**。Γ函数与β函数就是属于这类的积分。

（1）Γ函数

积分$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$是一个含参变量 α 的广义积分。这积分可换写成

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

由本节例 4 与例 9，可知原来的积分当 $\alpha>0$时是收敛的。因此，积分$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$在 $\alpha>0$的范围内确定了一个 α 的函数，称为**Γ函数**。记作$\Gamma(\alpha)$，即

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\ 其中\alpha>0 \qquad (1)$$

①Γ函数的递推公式

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \qquad (2)$$

证 根据Γ函数的定义

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$$

对它施用分部积分法，得

$$\Gamma(\alpha+1)=-[x^{\alpha}e^{-x}]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

上式右边第一项等于零，所以

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

我们常称（ 2 ）式为递推公式。特别地当α等于正整数n时有：

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)$$
$$=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots$$
$$=n(n-1)\cdots 2\times 1\times\Gamma(1)$$

如果我们把$1\times 2\times 3\cdots n$缩写成$n!$（读作阶乘。例如$3!=1\times 2\times 3=6$，$4!=1\times 2\times 3\times 4=24$，…等是）则

$$\Gamma(n+1)=n!\ \Gamma(1)$$

但 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$

于是得 $$\Gamma(n+1)=n! \qquad (3)$$

由此可见，当$\alpha=n$（正整数）时，很容易求出$\Gamma(\alpha)$的值来。

②Γ函数定域的推广：由上面公式（ 1 ）的定义得知$\Gamma(\alpha)$的定义域为$\alpha>0$，当$\alpha<0$时，积分是发散的，因此（ 1 ）无意义。但利用公式（ 2 ），我们扩充Γ函数的定义域。把公式（ 2 ）写为：

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \qquad (4)$$

当$-1<\alpha<0$时，$\alpha+1>0$，$\Gamma(\alpha+1)$有意义。因此，公式（ 4 ）右端有意义，于是左端$\Gamma(\alpha)$也是有了定义。

当$-2<\alpha<-1$时，有$-1<\alpha+1<0$，故有$0<\alpha+2<1$所以

由（ 2 ）有 $$\Gamma(\alpha+1)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha+1}$$

代入（ 4 ）有 $$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+1)}$$

因$\Gamma(\alpha+2)$有意义，故$\Gamma(\alpha)$也有意义依此类推，对于负值α的Γ函数，我们用表达式

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots(\alpha+1)\alpha} \qquad (5)$$

来确定，这里$k>-\alpha$由公式（4）得

$$\lim_{\alpha\to 0}\Gamma(\alpha)=\infty,\ \lim_{\alpha\to -1}\Gamma(\alpha)=\infty,\ \lim_{\alpha\to -2}\Gamma(\alpha)=\infty,$$

③Γ函数的图形（见图14-41）。

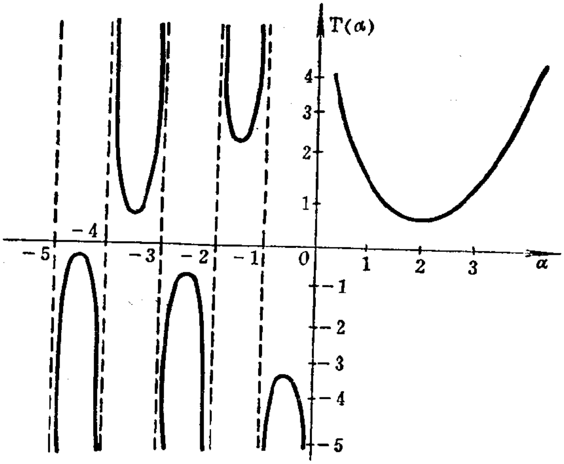


图 14-41

④Γ函数的其它形式列表如下：

换　　　元	变　　　式	名
$x=ay,\ a>0$	$\Gamma(\alpha)=a^{\alpha}\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}e^{-ay}dy$	(Γ_1)
$x=y^2$	$\Gamma(\alpha)=2\int_0^{+\infty}y^{2\alpha-1}e^{-y^2}dy$	(Γ_2)
$x=-\lambda\ln y$❶$,\lambda>0$	$\Gamma(\alpha)=\lambda^{\alpha}\int_0^{1}\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^{\lambda-1}dy$	(Γ_3)

❶ 把$x=-\lambda\ln y$写为$x=\lambda\ln\frac{1}{y}$代入（1）式。

⑤ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$之值：由$\Gamma_2$我们有：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy$$

但 $\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$（证明见本书重积分章）

$$\therefore \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad (6)$$

又由（4）式：$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\left(-2\sqrt{\pi}\right)=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$，等等。

例 1 求$\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)$

解 利用公式$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)=\Gamma\left(\frac{11}{5}+1\right)=\frac{11}{5}\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)$$

$$=\frac{11}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}+1\right)=\frac{11}{5}\times\frac{6}{5}\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$=\frac{11}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}\Gamma\cdot\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{66}{125}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$$

关于$\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$之值，可以利用$\Gamma$函数表查得。

例 2 求$\int_0^{+\infty}x^{1/2}e^{-x^3}dx$之值

解 令$x^3=y$，则$x=y^{1/3}$，　$dx=\frac{1}{3}y^{-2/3}dy$

$$\therefore \quad \int_0^{+\infty}x^{1/2}e^{-x^3}dx=\int_0^{+\infty}(y^{1/3})^{1/2}e^{-y}\times\frac{1}{3}y^{-2/3}dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} y^{-1/2}e^{-y}dy=\frac{1}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\pi}$$

（ 2 ）β 函数

考虑含两个参变量 p、q 的积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (7)$$

当$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$时，这积分是常义积分；当 $p<1$ 时，$x=0$ 是被积函数的无穷型间断点；当$q<1$时，$x=1$是被积函数的无穷型间断点。在后两种情形下，公式（ 7 ）都是广义积分。下面证明当$p>0$，$q>0$时，积分是收敛的。

为此在区间[0，1]内任意引入一个分点。例如$\frac{1}{2}$，则把这个积分写成两个积分的和：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx。$$

关于右边第一个积分作如下考虑：

应用定理3″，$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^m f(x)=A$

取$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$，$(x-a)^m=x^{1-p}$

此时　当 $0<1-p<1$时，即$0<p<1$时是收敛的。

同理，取$f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$，$(b-x)^m=(1-x)^{1-q}$则

$\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)^{1-q}(1-x)^{q-1}x^{p-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}x^{p-1}=1$

所以当$0<1-q<1$时，即$0<q<1$时收敛。

综上所述，知积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$当 $p>0$、$q>0$ 时是收敛的，我们把这个积分称为β 函数。记作$\beta(p,\ q)$，即

$$\beta(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (8)$$

①β 函数的对称性

即
$$\beta(p,\ q)=\beta(q,\ p) \qquad (9)$$

证 在（8）式中，令$x=1-y$，$dx=-dy$

$$\beta(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=-\int_1^0(1-y)^{p-1}y^{q-1}dy$$

$$=\int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}dy=\beta(q,\ p)$$

②β 函数的其他表达式如下表：

换　元	变　式	名
$x=\frac{y}{a}$	$\beta(p,q)=\frac{1}{a^{p+q-1}}\int_0^a y^{p-1}(a-y)^{q-1}dy$	β_1
$x=\sin^2\theta$	$\beta(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$	β_2
$x=\frac{y}{1+y}$	$\beta(p,q)=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$	β_3

③Γ函数与β 函数之间的关系

$$\beta(P,\ q)=\frac{\Gamma(P)\Gamma(q)}{\Gamma(P+q)}\text{（证明见本书重积分章）} \qquad (10)$$

例 1 求$\beta\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)$

解 $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$（见$\Gamma$函数）

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

所以 $$\beta\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(2)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{(2-1)!(-2\sqrt{\pi})}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=-4\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=-4$$

例 2 求$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$之值

解 令 $y=x^{\frac{1}{4}}$，则$x=y^4$，$dx=4y^3dy$

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}=\int_0^1\frac{4y^3dy}{\sqrt{1-y}}=4\int_0^1 y^3(1-y)^{-\frac{1}{2}}dy$$

此乃β_1型，$p-1=3$，$q-1=-\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}=4\beta\left(4,\ \frac{1}{2}\right)=4\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=4\times\frac{(4-1)!\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)}=\frac{4\times 3!\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{24\sqrt{\pi}}{\frac{105}{16}\sqrt{\pi}}=\frac{128}{35}$$

例 3 求$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$之值

解 令$y=x^2$，则$x=y^{\frac{1}{2}}$，$dx=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy}{(1+y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{(1+y)^2}dy$$

此式为β_3型，$p-1=-\frac{1}{2}$，$p+q=2$

即 $$p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad q=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\times\sqrt{\pi}=\frac{\pi}{4}$$

习 题 14-9

（1）判别下列积分的敛散性

1） $\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx$； 2） $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$；

3） $\int_0^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$。

答：1）发散；2）$a>0$收敛，$a\leqslant 0$发散；
3）发散。

（2）求Γ函数和β函数之值

1） $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$； 2） $\Gamma(-2.5)$；

3） $\beta\left(\frac{5}{2}, 2\right)$。

答：1） $\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$； 2） $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$；

3） $\frac{4}{35}$。

（3）利用Γ函数或β函数计算下列积分

1） $\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-2x} dx$，提示：令$y = 2x$，答：$\frac{1}{8}\sqrt{2\pi}$；

2） $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$，提示：令$x^2 = y$，答：$\frac{\pi}{4}$；

3） $\int_{-1}^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^3 dx$，提示：令$2y = 1 + x$，

答：$\frac{512}{315}\sqrt{2}$；

4）证明$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$；

5）证明$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

$$= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

此处$n > -1$，提示：设$y = \cos^2 x$（或$\sin^2 x$）。

总　　结

（一）定积分的概念与计算

本章先由实际问题出发，如曲边梯形面积问题，变力所作功的问题等，都是函数和的极限，然后抽象出定积分的定义：

设函数$f(x)$在$[a, b]$上有定义，把区间作任意分割：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

在子区间$[x_{i-1}, x_i)$上任取ξ_i，即$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

若 $\lim\limits_{max|\Delta x_i|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$存在，则称此极限为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分。记为：

$$\int_a^b f(x)dx$$

不是任何函数的定积分都存在的。但是，若函数在$[a,b]$上连续，则保证定积分一定存在。

在定积分的诸基本性质中，以积分中值定理

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi) \quad a\leqslant\xi\leqslant b$$

最为重要。通过它，我们证得两个定理：

1）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$；

2）若$f(x)$在$[a, b]$上连续，就保证了它的原函数存

在。通过这两个定理，我们就得到了定积分与不定积分的关系。

牛顿-莱布尼兹公式：

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任一原函数。

定积分的分部积分法：

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

与定积分的换元法：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$$

都是告诉我们在计算定积分时，应走的捷径。关于定积分的近似计算，我们介绍了三种方法。它们是：

①矩形法：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$$

②梯形法：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

③抛物线法：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3} \times \frac{b-a}{n}[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})]$$

其中以抛物线法的准确度较高。

（二）广义积分

广义积分有两个类型：

1）积分区间是无穷大者：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

2）被积函数有无穷型间断点者：

$$\int_a^b f(x)dx，其中\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty，或$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty$$

对于简单地，可以直接地把被积函数的原函数求出来然后看，当$\lim\limits_{x\to\infty}$或$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$时，此原函数是否存在，以定其是收敛或发散。对于那些原函数不能或不易表为初等函数的广义积分，通常使用下面的判断法：

关于第一个类型：

当$m>1$时，使$\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x)=A$，$A\geqslant 0$收敛

$m\leqslant 1$时，使$\lim\limits_{x\to+\infty} x^m f(x)=A$，$A>0$发散

关于第二个类型：

当$m<1$，$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=A$，$A>0$收敛

$m\geqslant 1$，$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^m f(x)=A$，$A>0$发散

（三）Γ函数与β函数

Γ函数与β函数是含有参变量的广义积分

① Γ函数：$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\Gamma(\alpha)$

它的递推公式为$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，特别是$\alpha=n$时，有$\Gamma(n+1)=n!$

②β函数：$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\beta(p,q)$

β函数有对称性：$\beta(p,q)=\beta(q,p)$

β函数与Γ函数的关系为：

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

第十五章　定积分的应用

［学习指示］　定积分是从实际问题中抽象出来的。十七世纪，牛顿-莱布尼兹发现了定积分与不定积分的关系，于是定积分得到了广泛的应用，本章对定积分的应用分两大部分来讨论，（一）几何上的应用，（二）物理上的应用。

我们在推导定积分一系列的公式中，主要是运用定积分是函数和的极限这一概念。希望读者在学完这一章后能学会运用概念这一种分析方法，而不要死记和硬套公式。

我们已经知道，定积分是函数和的极限。下面我们就利用这一概念来讨论定积分在几何方面与物理方面的一些应用，定积分的应用其主要关键是在于如何找出微小元素的近似表达式。

1）把区间$[a, b]$分成子区间$[x_i, x_{i+1}]$，

($i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$)。这时，我们是从下面的基本假设出发的，即所求的对应于全部区间的那个量，是对应于一切子区间的那些部分量之和，这种性质叫做可加性。例如面积、体积、弧长、功等均有这一性质。

$$A=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}[F(x_{i+1})-F(x_i)]❶ = \sum_{i=1}^{n-1}\Delta F(x_i)$$

其中

$$\Delta A_i=\Delta F(x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx=F(x_{i+1})-F(x_i)$$

(图15-1) 我们称$\Delta F(x_i)$为真元素。

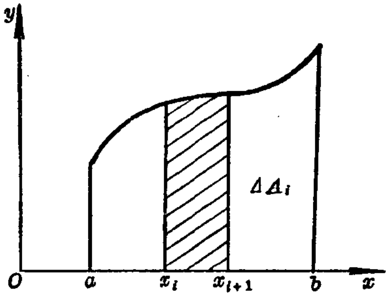


图 15-1

❶ $F(x_i)=\int_a^{x_i} f(x)dx$。

2 ）由于$F(x)$、$\Delta F(x_i)$事先均不知道，所以第二步要把这个真元素换成对应于区间$[x_i, x_{i+1}]$上的另一个量来近似表达它，即在区间$[x_i, x_{i+1}]$上换成不变的量$f(x_i)$，可令

$$F(b)-F(a)\approx\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

我们认识到：当子区间的数目无限增多且它们的长度都趋于零时，这个近似等式所产生的误差就无限减少。当取极限后，也就是说取定积分后，我们就得到等式

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

这种方法叫做元素相加法。把增量$\Delta F(x_i)$换成$f(x_i)\Delta x_i$，这一个重要的置换其用意就在于解题时我们并不知道前者，而后者却是已知量（这是因为在问题的条件中已经给出了曲线方程）。

§ 1　定积分在几何上的应用

（一）面积

（1）在直角坐标系中，平面图形面积的计算

在引入定积分概念时，我们已经讲过界于曲线$y=f(x)$和直线$x=a$，$x=b$和$y=0$之间的曲边梯形的面积是（图15-2）。

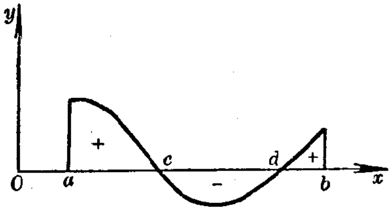


图 15-2

$$A=\int_a^b |f(x)|dx \quad 其中 a<b \qquad (1)$$

若 1 ）$f(x)>0$，则 $A=\int_a^b f(x)dx$

2 ）$f(x)<0$，则 $A=-\int_a^b f(x)dx$

3 ）若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有时为正，有时为负，则把它按曲线与 x 轴的交点分成若干个定积分来作，而把 $f(x)<0$ 处按 2 ）处理。

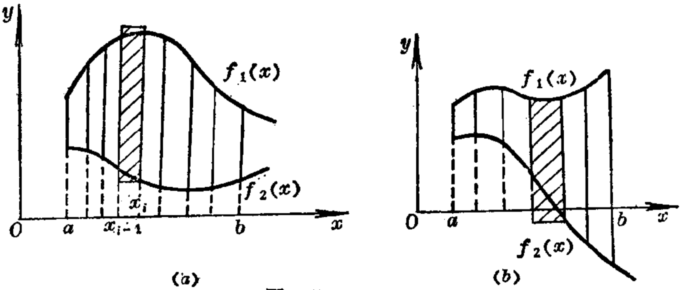
由此，不难计算直角坐标系中任意曲线所围成的平面图形的面积。

设在区间 $[a,b]$ 上曲线 $y=f_1(x)$ 位于曲线 $y=f_2(x)$ 上方，则这两条曲线及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的面积（图15-3 a，b ）为：

$$A=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx \qquad (2)$$

证

$$\Delta A_i \approx [f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i$$



(a) (b)

图 15-3

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$A = \lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f_1(\xi_i)-f_2(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx$$

如果平面曲线方程的 x 是 y 的单值函数，于是则界于曲线 $x=\varphi(y)$（假定 $\varphi(y)>0$）及直线 $y=c$，$y=d$（$c<d$）与 y 轴之间的曲边梯形的面积公式为（图15-4）：

$$A=\int_c^d\varphi(y)dy$$

若 $\varphi(y)$ 有时为正，有时为负，则

$$A=\int_c^d|\varphi(y)|dy \qquad (3)$$

与公式（2）类似我们有公式

$$A=\int_c^d[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]dy\text{（图15-5）} \qquad (4)$$

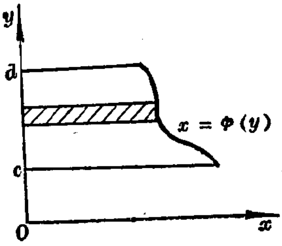


图 15-4

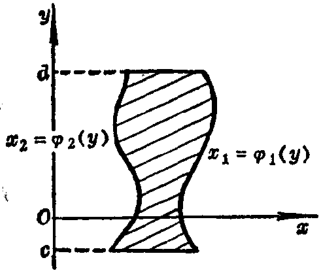


图 15-5

在一般情形下，任意曲线所围成的平面图形，可以看作是由若干个象上面那样的图形所组成的，如图15-6所示的平面图形，可以分成三部分，使每部分的周界曲线与平行 y 轴

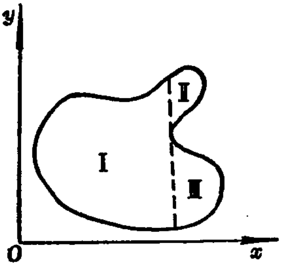


图 15-6

（或 x 轴）的直线的交点不超过两个，则都可以应用上面公式来计算它们的面积，最后将各部分相加，即为所求。

若两条曲线相交，求其所围的面积时（图15-7）可使用公式（2）但要注意：

首先把图形画出，求出交点 c，在此点之左，由图知

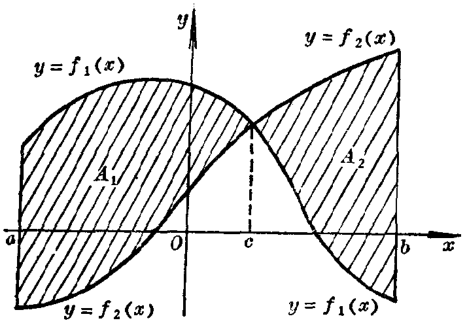


图 15-7

$f_1(x)>f_2(x)$所以

$$A_1=\int_a^c[f_1(x)-f_2(x)]dx$$

而在 c 之右，则$f_2(x)>f_1(x)$所以公式

$$A_2=\int_c^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$$

例 1　求由曲线$y=x^2+1$与直线$y+x=3$所围成的面积。

解　先作图（图15-8），可看出直线在上，抛物线在下，所以在积分时应当是直线方程减去曲线方程；再联立此二方程，解出其交点（1，2），（－2，5），依此定出定积分的上下限：

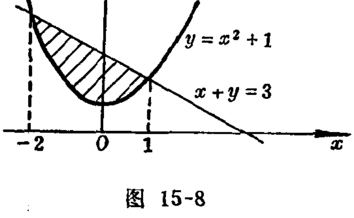


图 15-8

$$A=\int_{-2}^{1}[(3-x)-(x^2+1)]dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=4\frac{1}{2}$$

例 2 求由曲线 $y=6+x-x^2$ 与直线 $y=-x+3$ 所围成的面积（图15-9）。

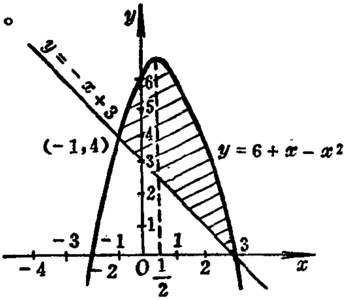


图 15-9

解 先联立解出交点（$-1,4$），（$3,0$），所以

$$A=\int_{-1}^{3}[(6+x-x^2)-(-x+3)]dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(3+2x-x^2)dx$$

$$=\left[3x+x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$$

例 3 求$y=x^2$与$y=\sqrt{x}$之间的面积（图15-10）。

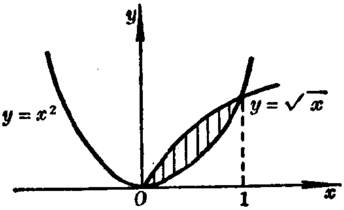


图 15-10

解 先解出两曲线的交点（0，0），（1，1），所以

$$A=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{1}{3}$$

例 4 求 $y=x^2$，$y=\frac{4}{3}x$ 之间的面积（图5-11）。

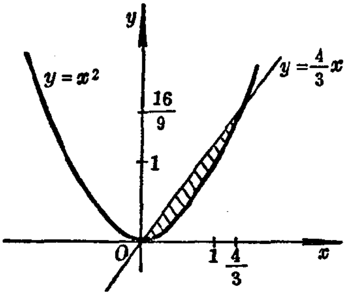


图 15-11

解 先联立此二方程解出交点（0,0），$\left(\frac{4}{3},\ \frac{16}{9}\right)$，

$$A=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{3}x-x^2\right)dx=\frac{32}{81}$$

例 5 求位于抛物线 $x^2=4ay$ 与箕舌线 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$（$a>0$）间的面积 S（图15-12）。

解 把方程 $x^2=4ay$ 及 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 联立求解，得两曲线的交点 $A(-2a,a)$ 及 $B(2a,a)$。由于图形的对称性，我们可以取下限为 0，上限为 $2a$ 的积分乘以 2，于是应用公式（2）得所求面积为：

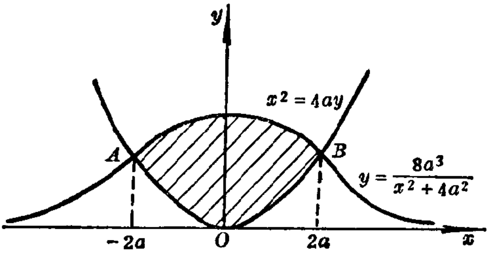


图 15-12

$$S=2\int_0^{2a}\left[\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right]dx$$

$$=16a^3\cdot\frac{1}{2a}\left[\operatorname{csctg}\frac{x}{2a}\right]_0^{2a}-\left[\frac{1}{6a}x^3\right]_0^{2a}$$

$$=8a^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6a}\cdot 8a^3=2\pi a^2-\frac{4}{3}a^2=2a^2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)$$

例 6 求 $y=x^3-x$与$y=x-x^2$间的面积（图 15-13）。

解 先联立两个方程，解出交点（$-2,-6$），(0,0)，（1,0），计算这个图形的面积时要分为两部分考虑：

1）考虑左边 A_1的图形时，$y=x^3-x$ 是在 $y=x-x^2$之上，所以

$$A_1=\int_{-2}^{0}[(x^3-x)-(x-x^2)]dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{8}{3}$$

2）考虑右边 A_2的图形时，$y=x-x^2$是在 $y=x^3-x$ 之上，所以

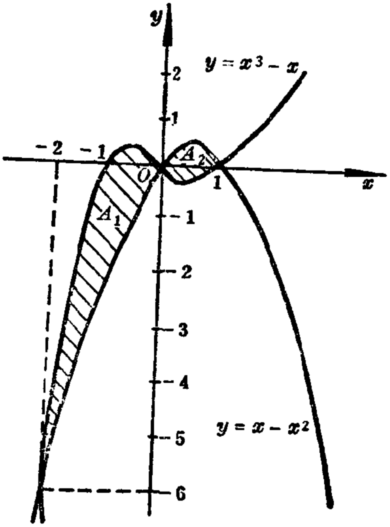


图 15-13

$$A_2=\int_0^1[(x-x^2)-(x^3-x)]dx$$

$$=\left[x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

因得 $$A=A_1+A_2=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}=3\frac{1}{12}$$

例 7 求由 $y=x^2-2x-3$ 与 $y=6x-x^2-3$ 所围的面积（图15-14）。

解 先将方程联立解出两曲线的交点(0，-3)，(4，5)

$$A=\int_0^4[6x-x^2-3)-(x^2-2x-3)]dx$$

$$=\left[4x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^4=21\frac{1}{3}$$

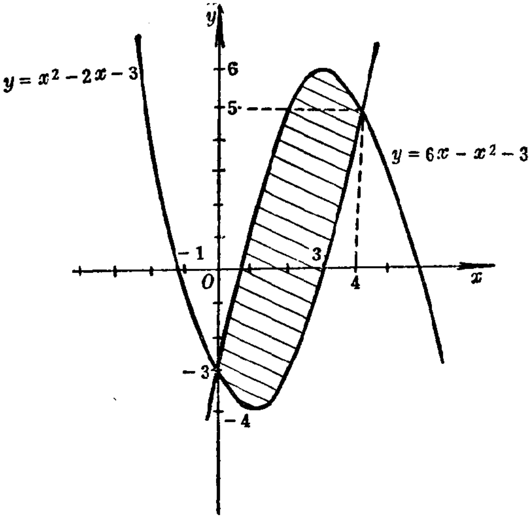


图 15-14

例 8 求由曲线 $y^2=-4\times(x-1)$与 $y^2=-2(x-2)$ 所围成的面积(图15-15)。

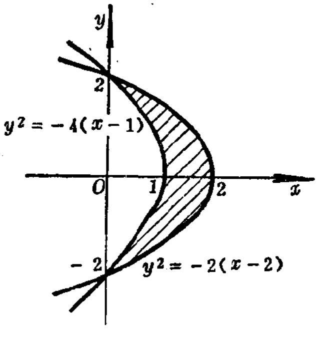


图 15-15

解 此题x为y的单值函数，故解出x得：

$$x=\frac{1}{4}(4-y^2),x=\frac{1}{2}(4-y^2)$$

联立此二式得交点为（0,2），（0,−2），故宜用公式（4）

$$A=\int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{2}(4-y^2)-\frac{1}{4}(4-y^2)\right]dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(4-y^2)dy❶$$

$$=2\times\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}(4-y^2)dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[4y-\frac{1}{3}y^3\right]^2=\frac{8}{3}$$

例 9 求$y^2=2x$与$y=x-4$所围成的面积（图15-16）。

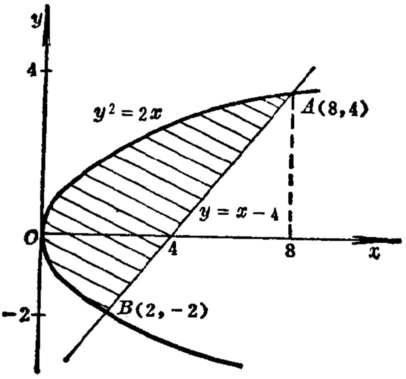


图 15-16

解 先联立方程得交点$A(8,4)$，$B(2,-2)$，所求面积可以看作是由$x=y+4$，$x=\frac{y^2}{2}$两个x的单值函数所围

---

❶ 因$x=(4-y^2)$为偶函数。

成，y 由-2到4。所以用公式（4）

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4}=18$$

在计算曲线所包围的面积时，若把方程改写成参数方程，可在计算上省掉许多繁琐的运算，今设参数方程为：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

x	a	b
t	α	β

则相应的面积公式

$$A=\int_a^b ydx \quad \text{即可化为：} \quad A\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

例 10 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积（图15-17）。

解 由于图形对于两个坐标轴都对称，因此可只计算第一象限内的面积然后四倍即可：

$$A=4\int_0^a ydx$$

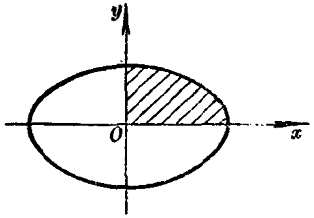


图 15-17

为了避免由椭圆方程中解出 y 再代入到这个公式中较为复杂的运算，我们可利用椭圆的参数方程

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$$

用新变量 θ 代换变量 x，则

x	0	a
θ	$\frac{\pi}{2}$	0

于是有：

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin^2\theta d\theta$$

$$=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=4ab\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=ab\pi$$

当$a=b$时，我们即得到所熟知的圆的面积公式πa^2。

（2）在极坐标系中情形

平面图形面积的计算由上面所述，我们已能够计算直角坐标系中曲线所围成的面积问题。如果所给方程式为极坐标时，应如何计算它的面积呢？当然，我们可以把极坐标方程先化为直角坐标方程，然后再按直角坐标来处理。但把极坐标方程化为直角坐标方程，会使运算繁琐，所以下面我们要寻求一个能直接用极坐标方程计算面积的方法。

定义　**若曲线**$\rho=f(\theta)$**和由极点**O**出发的任一射线相交不多于一点，则该曲线与二动径（即二射线）**$\theta=\alpha$ **及** $\theta=\beta$ **所围的图形叫做曲边扇形**（图15-18）。

计算这个曲边扇形面积也和在直角坐标系里一样，需要把曲边扇形分成小块来处理，然后找一个容易计算此小块的近似表达式（即真元素）。因为函数的自变量为θ，所以我们选积分变量时也要把它取为θ才能便于计算，所以我们想到小扇形是一个理想的近似元素。

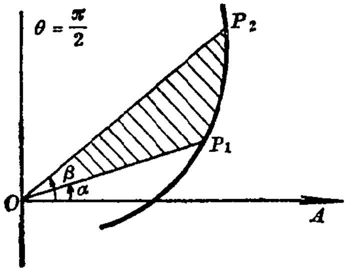


图 15-18

设 $\rho=f(\theta)$，求 OP_0P_n 所围成的面积（图15-19）。

用 OP_0，OP_1，……，OP_n 把 $\angle P_0OP_n$ 分为 n 个角，由于扇形面积为 $\frac{1}{2}r^2\theta$，所以

$$\Delta A_i\approx\frac{1}{2}(OP_i)^2\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\theta_i$$

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2\Delta\theta_i$$

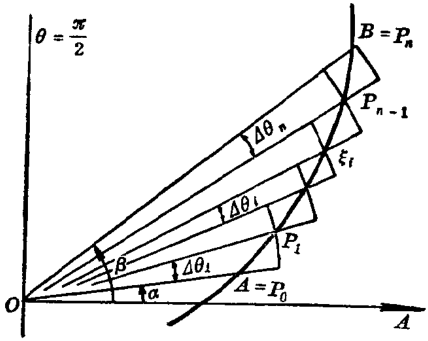


图 15-19

将曲边扇形分得很碎，取极限后得：

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta \qquad (6)$$

例 11 计算$\rho^2=a^2\cos 2\theta$围成的全面积。

解 由于对称，我们只计算四分之一即可。在第一象限内此曲线在点 0 的切线与轴成$\frac{\pi}{4}$角，图 15-20 内阴影部分即等于全面积的$\frac{1}{4}$，所以

$$S=4\times\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta d\theta$$

$$=2a^2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2$$

例 12 求心形线$\rho=a(1+\cos\theta)$所围成的面积。

解 我们知道此曲线对称于极轴，由图 15-21明显看出位于极轴上方的面积是当 θ 由 0 变到 π 时，动径所扫过的面积，所以

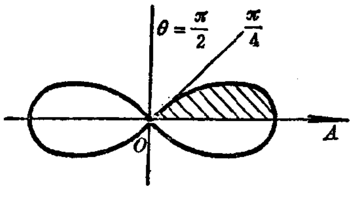


图 15-20

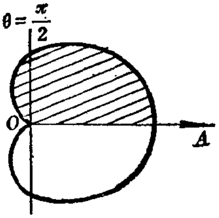


图 15-21

$$S=2\times\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=a^2\left[\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi a^2$$

例 13 求由曲线 $\rho=1+2\sin\theta$ 的两瓣所围成的面积 S（图15-22a）。

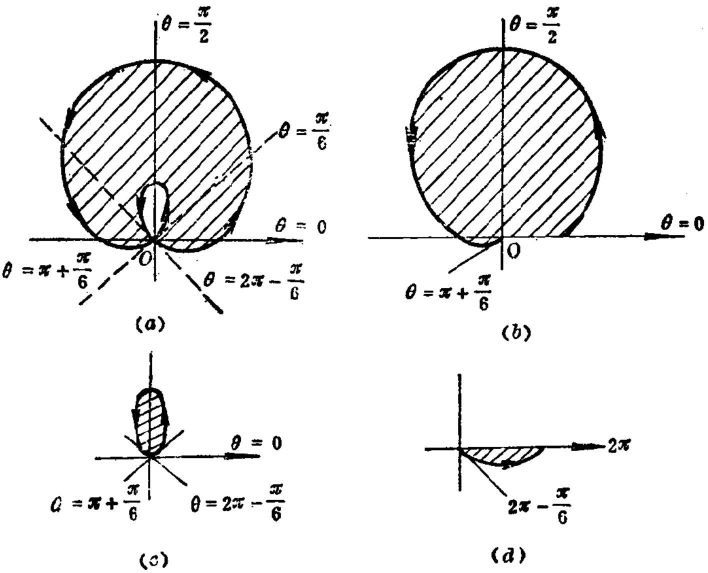


图 15-22

解　当θ由0到$\pi+\frac{\pi}{6}$时，其动径所扫过的面积为图（15-22b），今设此面积为S_1。

当θ由$\pi+\frac{\pi}{6}$到$2\pi-\frac{\pi}{6}$时，动径所扫过的面积如图（15-22c），今设其为S_2。

当θ由$2\pi-\frac{\pi}{6}$到2π时，动径所扫过的面积如图（15-22d），今设其为S_3。

所以

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\theta=S_1+S_2+S_3，\text{但}S_1+S_2+S_3=S+2S_2$$

而

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}}\rho^2 d\theta$$

所以

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\theta-2\times\frac{1}{2}\int_{\pi+\frac{\pi}{6}}^{2\pi-\frac{\pi}{6}}\rho^2 d\theta$$

因　　$\rho^2=1+4\sin\theta+4\sin^2\theta$

所以

$$\int\rho^2 d\theta=\theta-4\cos\theta+2(\theta-\sin\theta\cos\theta)+C$$
$$=3\theta-4\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta+C$$

因得：

$$S=\frac{1}{2}[3\theta-4\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta]_0^{2\pi}$$

$$-\left[3\theta-4\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\right]_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}$$

$$=\frac{1}{2}[(3\times 2\pi-4)-(0-4)]$$

$$-\left\{\left[\frac{11\pi}{6}\times 3-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{7\pi}{6}\times 3-4\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=3\pi-(2\pi-3\sqrt{3})=\pi+3\sqrt{3}$$

例 14 试计算曲线 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta$ 与 $\rho^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$ 的公共面积。

解 先解联立方程组

$$\begin{cases}\rho^2=\sqrt{3}\sin 2\theta\\ \rho=\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}$$

即
$$2\cos^2\theta=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos\theta(2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)=0$$

$\cos\theta=0$，得 $\theta=\frac{\pi}{2}$；又 $2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta=0$，即 $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 得 $\theta=\frac{\pi}{6}$。从图 15-23 看到，由 0 到 $\frac{\pi}{6}$ 时，曲线为：$\rho^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$，若设动径所扫的面积为 S_1，则

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\sin 2\theta d\theta$$

又 $\frac{\pi}{6}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 时，曲线为 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta$，若设动径所扫的面积

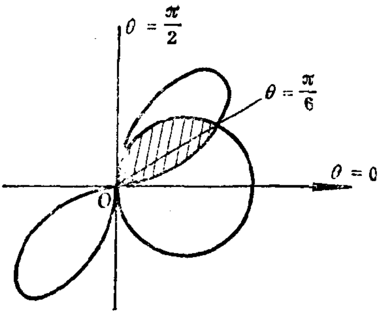


图 15-23

为S_2，则

$$S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta d\theta$$

必须注意，在计算此类公共面积S时，要按照具体的情况分别使用不同的方程和积分的上下限来计算。

所以

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{3}\sin 2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{6}$$

简 短 小 结

综上所述，我们知道求平面图形面积有 6 个公式。在直角坐标系中，当求两条曲线所围的面积时，首先要把交点解

出，这个交点供定积分的上下限之用，然后画出草图。根据函数的单值的情况来决定用公式（2）还是用公式（4）。在草图中，视曲线位置的上、下（或左、右）来决定用哪一个函数减哪一个函数。当曲线出现上、下交替（或左、右）时，就需要分段处理，如例6。在极坐标系中，处理方法与直角坐标的情况相类似，但须注意公式（6）中常数“$\frac{1}{2}$”是公式原来就有的，故在应用此公式时千万不要丢掉，也不能理解为面积的一半。在计算两个极坐标曲线所围的公共面积时，要注意动径所扫的面积是属于哪一条曲线的动径，要正确的把方程代入公式中，不然就会弄错，而得不到正确答案。

习 题 15-1

（1）试计算由下列各曲线所围成的图形的面积。

1） $y=5x$，$y=0$及$x=2$；

2） $xy=a^2$，$y=0$，$x=a$及$x=2a$；

3） $y=4-x^2$及$y=0$；

4） $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$，$x$轴、$y$轴及$x=a$；

5） $y=x^3$，$y=8$及y轴；

6） 介于 $y^2=2x$，$y^2=4x-x^2$之间；

7） $2x+y+8=0$，$y=-4$及y轴。

答：1）10；2）$a^2\ln 2$；3）$10\frac{2}{3}$；4）$\frac{a^2}{2e}(e^2-1)$；

5）12；6）$2\left(\pi\pm\frac{8}{3}\right)$；7）4。

（2）求由$y=\sin x$与x轴所包围的面积。

1) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$之间的面积；

2) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$之间的面积。

答：1) 1； 2) 2。

(3) 抛物线顶点在(0， h)，以 y 轴为对称轴，又过$\left(\frac{b}{2}, 0\right)$，($b>0$, $h>0$) 求此抛物线与 x 轴间的面积。

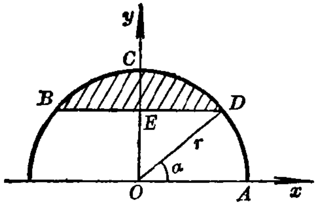
答：$\frac{2}{3}hb$。

(4) 求$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$与 $y=H$ ($H>a$) 之间的面积。

答：$\frac{2b}{a}\left[\frac{H}{2}\sqrt{H^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\text{arc}\cosh\frac{H}{a}\right]$。

(5) 证明下面图形的面积为：

$BCDEB$的面积$=\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)$。



第 5 题

(6) $x^2+y^2=8$ 被 $y=\frac{x^2}{2}$分为两部分，求每一部分的面积。

答：$2\pi+\frac{4}{3}$；

$6\pi-\frac{4}{3}$。

(7) 求由曲线$x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围成的面积。

答：$\frac{3a^2\pi}{8}$。

(8) 求摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 一拱所包

围的面积（即 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 x 轴及曲线所包围的面积）。

答：$3\pi a^2$。

（9）计算由下列曲线所围成的面积。

1） $\rho=a\sin 3\theta$； 2） $\rho=a\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$；

3） $\rho=r$； 4） $\rho=2a\sin\theta$；

5） $\rho=2a\cos\theta$； 6） $\rho=a\cos 2\theta$；

7） $\rho=a(1+\cos\theta)$； 8） $\rho=3-\sin\theta$；

9） $\rho^2=a^2\sin 4\theta$； 10*） $\rho=\frac{1}{2}+\cos\varphi$。

答：1）$\frac{\pi a^2}{4}$； 2）$\frac{4}{3}\pi^3a^2$； 3）πr^2； 4）πa^2；
5）πa^2； 6）$\frac{1}{2}\pi a^2$； 7）$\frac{3}{2}\pi a^2$； 8）$\frac{19}{2}\pi$；9）a^2；
10）$\frac{3\pi}{4}$。

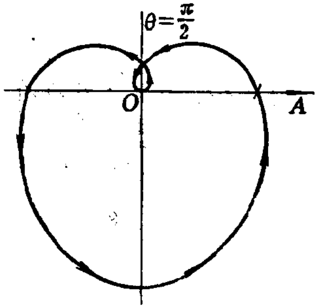
（10）求 $\rho=1$，$\rho=1+\cos\theta$的公共部分。

答：$\frac{5\pi}{4}-2$。

（11）求 $\rho=3\cos\varphi$，$\rho=1+\cos\varphi$的公共部分。

答：$\frac{5\pi}{4}$。

（12*）求$\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$内圈所包围的面积；外圈所包围的面积；夹于两圈中间的面积。



第 12 题

提示：

①设内圈面积为S_1

$$\frac{1}{2}S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho^2 d\theta$$

答： $\dfrac{a^2(5\pi-9\sqrt{3})}{32}$。

②设外圈面积为S_2

$$\frac{1}{2}S_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\rho^2 d\theta$$

答： $\dfrac{a^2(10\pi+9\sqrt{3})}{32}$。

③设两圈之间的面积为S，则

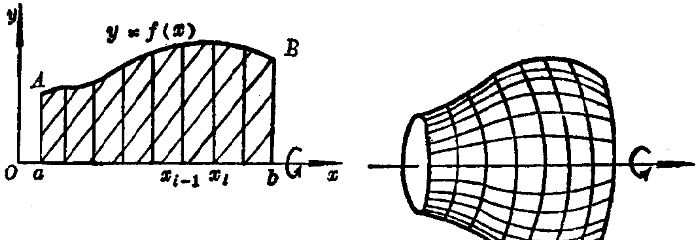
$$S=S_2-S_1=\frac{a^2}{32}(5\pi+18\sqrt{3})$$

（二）体积

（1）切片法

1）旋转体体积

①绕x轴旋转：若一连续曲线$y=f(x)$的弧$\overset{\frown}{AB}$(假定它不与x轴相交如图15-24a)与直线$x=a$，$x=b$及x轴所围成的面积绕x轴旋转一周，就产生一个旋转体(图15-24b)。



(a) (b)

图 15-24

把[a, b]任意分成n个小区间[x_{i-1},x_i]($i=1,2,\cdots n$),

其中$x_0=a$，$x_n=b$；再作通过各分点x_i而垂直于x轴的平面，则对应于点x_i旋转的截面积为：

$\Delta A_i=\pi y_i^2$（旋转体每一个截面积均为一圆的面积）

而它对应的体积即为：

$\Delta v_i\approx\Delta A_i\Delta x_i=\pi y_i^2\Delta x_i$（即将物体切成薄片之体积）

今以V_x表示绕x轴所成的体积

$$V_x=\lim_{max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi y_i^2\Delta x_i=\pi\int_a^b y^2dx$$

$$=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx \qquad (7)$$

②绕y轴旋转：若一连续曲线方程是$x=\varphi(y)$（假定它并不与y轴相交，图15-25），它与直线$y=c$，$y=d$及y轴围成的平面图形绕着y轴旋转一周所产生的旋转体体积为

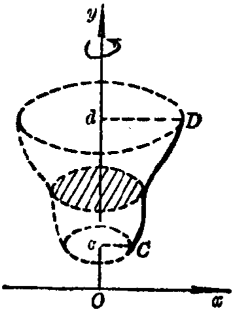


图 15-25

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy$$

$$=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy \qquad (8)$$

例 1 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（图15-26$a$）绕$x$轴旋转所得的旋转体体积。

解 由于图形对称于两轴，故由公式（7）得：

$$V_x=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\frac{2b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2b^2}{a^2}\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$=\frac{4ab^2}{3}\pi \quad (\text{图}15\text{-}26b)$$

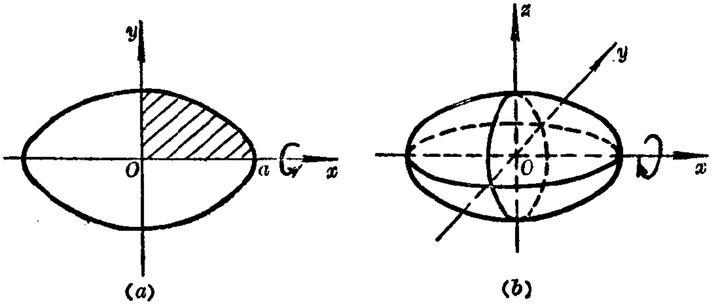
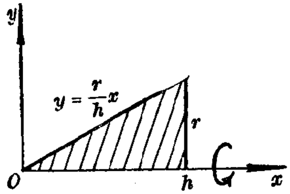


图 15-26

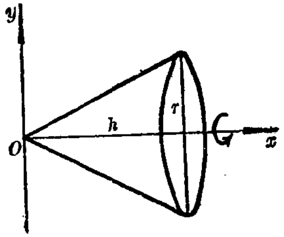
例 2 求正圆锥体体积，设其高为h，底半径为r。

解 我们知道此体积为由$y=\frac{r}{h}x$，$y=0,x=h$所围成的三角形（图15-27a）绕x轴旋转而成的体积（图15-27b），故

$$V_x=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h\frac{r^2}{h^2}x^2dx$$



(a)



(b)

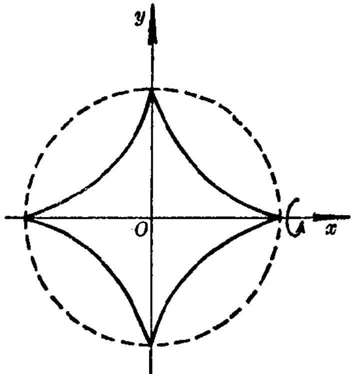
图 15-27

$$=\pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

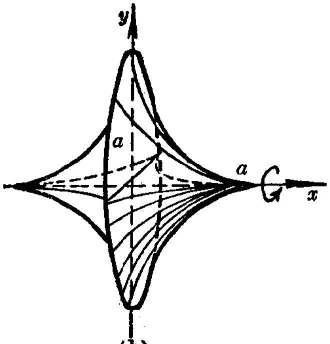
例 3 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（图15-28$a$）围成的图形绕$x$轴所产生的旋转体的体积（图15-28$b$）。

解 1 这里，$y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$，$y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3$

由公式（7）：



(a)



(b)

图 15-28

$$V_x = 2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$$

$$= 2\pi\int_0^a (a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2) dx$$

$$= 2\pi\left[a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= 2\pi\left[a^3 - \frac{9}{5}a^3 + \frac{9}{7}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right]$$

$$= \frac{32}{105}\pi a^3$$

解 2 对于此题若采用参数方程:

x	0	a
t	$\frac{\pi}{2}$	0

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

则 $y^2 = a^2\sin^6 t$, $dx = -3a\cos^2 t\sin t dt$, 代入(7)中得:

$$V_x = -2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t dt$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t dt = 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t(1 - \sin^2 t) dt$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^7 t - \sin^9 t) dt$$

$$= 6\pi a^3\left[\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7} - \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\right]$$

$$= 6\pi a^3 \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{32}{105}\pi a^3$$

例 4 今有一环体（图15-29a），它是由 $x^2+(y-b)^2=a^2$（图15-29b），$b>a$，绕 x 轴旋转一周而成的，试计算其体积。

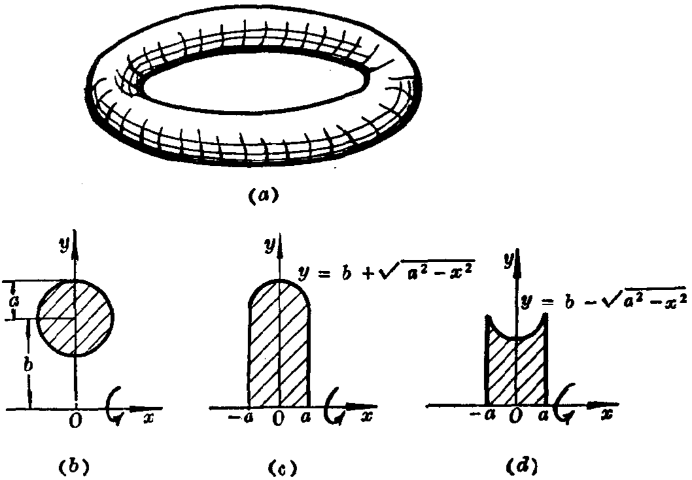


图 15-29

解 由$y=b+\sqrt{a^2-x^2}$，$y=0$；$x=-a$，$x=a$所围成的面积（图15-29c）绕 x 轴旋转一周，所得的体积为一凸边滑轮，今设其体积为V_1，即

$$V_1=2\pi\int_0^a(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx$$

又由$y=b-\sqrt{a^2-x^2}$，$y=0$；$x=-a$，$x=a$所围成的面

积（图15-29d）绕x轴旋转一周所得的体积为一凹边滑轮，今设其体积为V_2，即

$$V_2=2\pi\int_0^a(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx$$

若此环体的体积为V，则

$$V=V_1-V_2=2\pi\left[\int_0^a(b+\sqrt{a^2-x^2})^2dx\right.$$

$$\left.-\int_0^a(b-\sqrt{a^2-x^2})^2dx\right]$$

$$=2\pi\int_0^a\left[(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\right]dx$$

$$=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\pi b\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\text{cscsin}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=4\pi ba^2\frac{\pi}{2}=2\pi^2a^2b$$

关于绕y轴旋转的旋转体因其方法与绕x轴旋转完全相同，只是改用公式（7′）而已，所以不再举例，有一些这方面的习题，留给读者自己去练习。

2）平行截面面积为已知的立体的体积

我们用切片法讨论了上述规则的旋转体体积，下面我们仍用切片法来讨论不象旋转体那样有规律的体积问题。设所考虑的立体为一曲面及垂直于x轴的两个平面$x=a$，$x=b$所包围，并设每一垂直于x轴的平面与该立体相交的截面面

积是x的连续函数$S(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$（图 15-30）。为了计算这个立体体积V，可以把区间$[a,\ b]$任意分成n个小区间$[x_{i-1},\ x_i]$，（$i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$），其中$x_0=a$，$x_n=b$。再通过各分点x_i作垂直于x轴的平面，则对应于点x_i的截面面积为$S(x_i)$，而介于两截面$S(x_{i-1})$及$S(x_i)$间的立体的高为$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$，设这样一个被曲面及两截面所包围的薄片体积为ΔV_i，则所求物体的体积V显然是：

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$$

因为截面积$S(x)$是x的连续函数，该薄片在区间$[x_{i-1},\ x_i]$上有最小截面面积$m_i=S(x_i')$与最大截面面积$M_i=S(x_i'')$。又因以面积M_i为底以Δx_i为高的直柱体体积是$M_i\Delta x_i$，以面积m_i为底以Δx_i为高的直柱体体积是$m_i\Delta x_i$，所以ΔV_i应在此二体积之间，我们有：

$$m_i\Delta x_i\leqslant\Delta V_i\leqslant M_i\Delta x_i$$

就整个体积而言，应为：

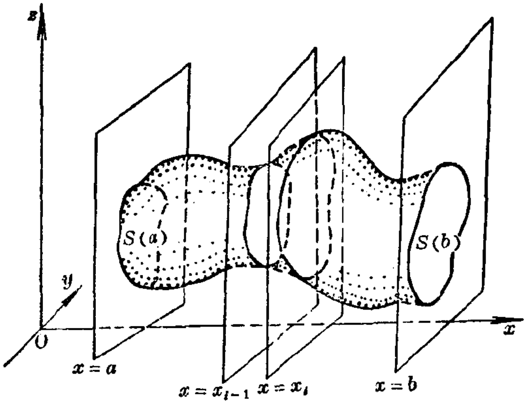


图 15-30

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

也就是：

$$\sum_{i=1}^{n} S(x_i') \Delta x_i \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} S(x_i'') \Delta x_i$$

但$S(x)$是在闭区间$[a, b]$上的连续函数，所以当$max|\Delta x_i|$趋于零时，上述左右两个和式的极限存在且相等，因此在区间$[a, b]$上的立体体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (9)$$

其中$S(x)$是垂直于x轴而以x为自变量的截面面积，a与b各为垂直于x轴的首末两截面在该轴上的交点。从这里可以看出，旋转体仅是这一方法的特殊情况。

例 5 求以圆为底，以该圆直径为顶的宽度，而高为h的正劈锥体体积V（图15-31a）。

解 取圆心为原点，则圆的方程是$x^2+y^2=r^2$（图 15-31b）过y轴上点y_i作垂直于y轴的平面，截正劈锥体得等腰三角形PQR，此截面的面积为：

$$S(x_i)=h\cdot x_i=h\sqrt{r^2-y_i^2} \quad (\text{图}15\text{-}31c)$$

所以 $V=2h\int_0^r \sqrt{r^2-y^2}\,dy$作变换，令$y=r\sin\theta$则有：

y	0	r
θ	0	$\frac{\pi}{2}$

因得：

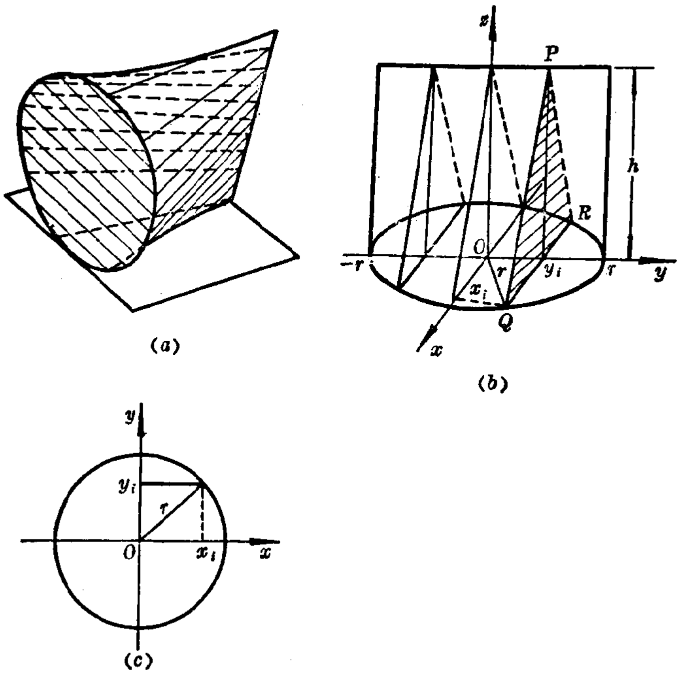


图 15-31

$$V=2h\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta d\theta=2hr^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos\theta}{2}d\theta$$

$$=2hr^2\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi r^2 h}{2}$$

由此可知正劈锥体体积是底圆面积与高的积的一半，也就是等于同底同高圆柱体体积的一半。

例 6 某林场伐木工人用锯平行地向半径为 2 尺之树锯去直达树心，然后用锯与地面成 45° 角再锯去亦过树心，如此锯落一木块（图15-32a），试求此木块之体积。

解 1 因木块体积为对称，故可只计算一半，即在图 15-32a中的一半$ABCD$即够了。现在我们在图15-32b中，OA的

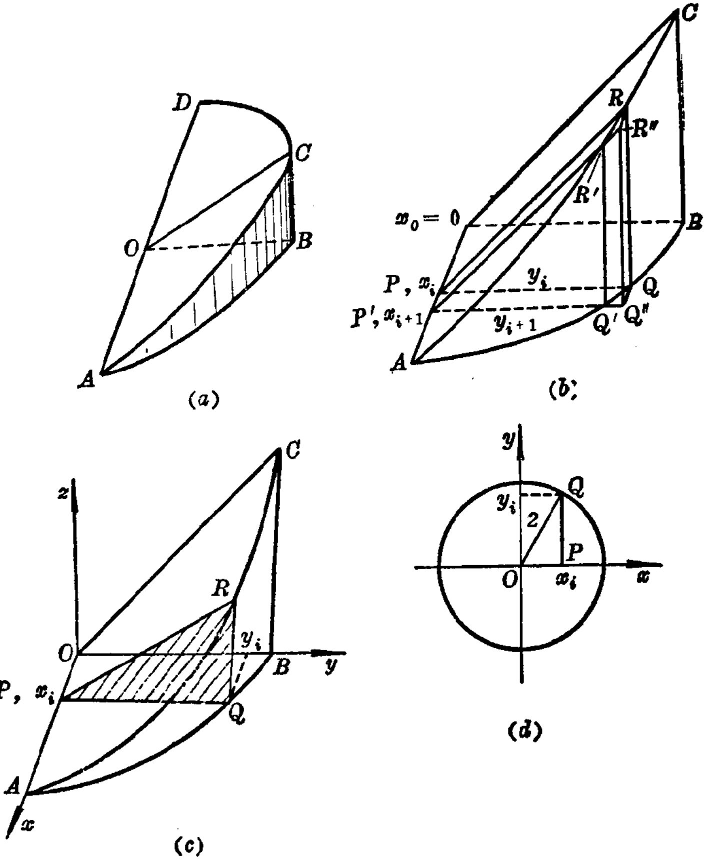


图 15-32

一边垂直于地面，平行于OBC作n个切片，如果切片切得很薄，则每个小切片均近乎一个等腰直角三角形如图15-32c中阴影所示。

现在已知$x^2+y^2=4$（图15-32d）。

则

$$\Delta V_i \approx \frac{1}{2} y_i^2 \Delta x_i = \frac{1}{2}(4-x_i^2)\Delta x_i$$

$$V \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(4-x_i^2)\Delta x_i$$

即

$$V = 2\int_0^2\left(2-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$= 2\left[2x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}\text{立方尺}$$

解 2 如果平行zOx坐标面作切片(图 15-33)我们有：

$$\Delta V_i = x_i z_i \Delta y_i = \sqrt{4-y_i^2}\,y_i \Delta y_i$$

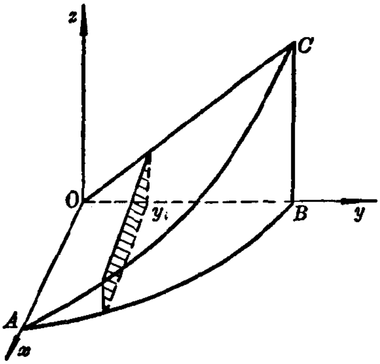


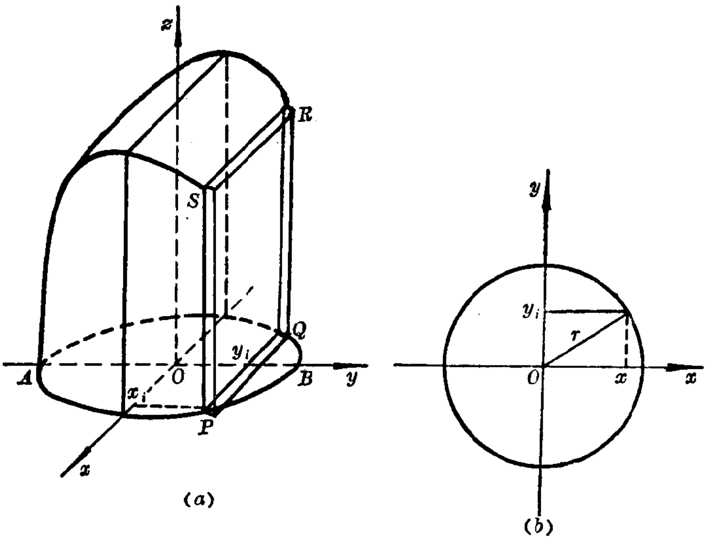
图 15-33

$$\therefore \qquad V = 2\int_0^2 y\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= -\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,d(4-y^2)$$

$$= \frac{16}{3}\text{立方尺}$$

例 7 一立体的底为圆形，半径为r，每个竖切片均为一正方形，求此体积（图15-34a）。



(a) (b)

图 15-34

解 因其底之周界为$x^2+y^2=r^2$（图15-34b），故有

$$\Delta A_i = 4x_i^2 = 4(r^2-y_i^2)$$

$$\Delta V_i = 4(r^2-y_i^2)\Delta y_i$$

$$V=8\int_0^r(r^2-y^2)dy=\frac{16}{3}r^3$$

例 8 一个号角由一串动圆所组成，此动圆沿两抛物线 $y_1=\sqrt{x}$，$y_2=\frac{\sqrt{x}}{2}$移动，当 $x=4$ 时，求此号角之体积（图15-35）。

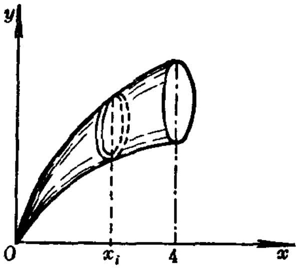


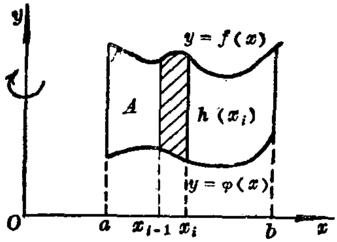
图 15-35

解 $$V=\int_0^4\pi\left(\frac{\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}}{2}\right)^2dx$$

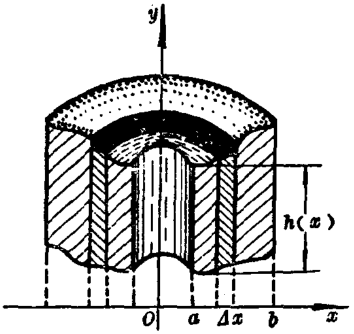
$$=\frac{\pi}{16}\int_0^4 xdx=\frac{\pi}{2}$$

（2）剥壳法

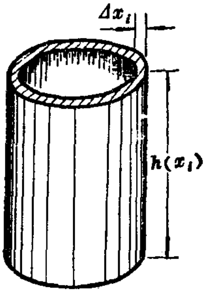
这一方法对于计算某些旋转体体积是非常方便的。设曲线$y=f(x)$、$y=\varphi(x)$及$x=a$，$x=b$围成平面A（图15-36a），求A绕y轴旋转所成的旋转体体积（图15-36b）。如用前面讲过的方法，既要求出所给函数的反函数$x=F(y)$，$x=\Phi(y)$；又要用两个积分式相减，计算过程是比较麻烦的。现在介绍剥壳法，既不用化为反函数，并且只用一个积分



(a)



(b)



(c)

图 15-36

式，计算简单得多了。我们把 A（图15-36a）分为具有高为 $h(x_i)[h(x_i)=f(x_i)-\varphi(x_i)]$的小窄条，设其宽度为 Δx_i，此窄条绕 y 轴所成的旋转体是以高为 $h(x_i)$厚度为Δx_i的圆筒壳（图15-36 c ）。

设其体积为 ΔV_i:

$$\Delta V_i \approx [\pi(x_{i-1}+\Delta x_i)^2 h(x_i) - \pi x_{i-1}^2 h(x_i)]$$

$$V_y=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n}[\pi(x_{i-1}+\Delta x_i)^2h(x_i)$$

$$-\pi x_{i-1}^2h(x_i)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\pi h(x_i)[2x_{i-1}\Delta x_i+\Delta x_i^2]$$

$$=2\pi\sum_{i=1}^{n}h(x_i)\left[x_{i-1}+\frac{1}{2}\Delta x_i\right]\Delta x_i$$

$$=2\pi\sum_{i=1}^{n}h(x_i)x'_{i-1}\Delta x_i\text{，其中}x'_{i-1}=x_{i-1}+\frac{1}{2}\Delta x_i$$

取极限后得：

$$V_y=2\pi\int_a^b xh(x)dx \qquad (10)$$

同理，若绕 x 轴旋转时，我们就有公式

$$V_x=2\pi\int_c^d yh(y)dy \qquad (11)$$

例 9 今有一面积在曲线$8y=12x-x^3$之上而在 $y=2$ 之下，且在$x=0$与$x=2$之间。将此面积绕 y 轴旋转一周，试求此旋转体体积（图15-37）。

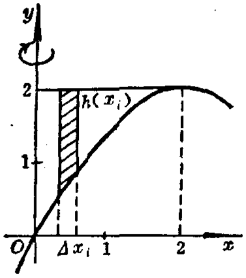


图 15-37

解 此面积之高 $h(x)=2-y=2-\frac{1}{8}(12x-x^3)$，所以

$$V_y=2\pi\int_0^2 x(2-y)dx$$

$$=2\pi\int_0^2 x\left(2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}x^3\right)dx$$

$$=2\pi\int_0^2\left(2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4\right)dx=\frac{8\pi}{5}$$

例 10 设 B 代表 $y^2=x^3$ 与 y 轴和 $y=8$ 之间的平面（图 15-38），求 B 绕 $x=4$ 旋转之体积。

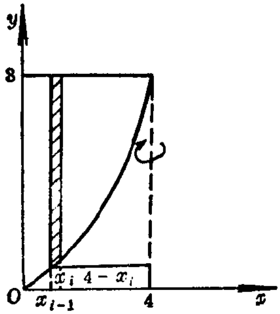


图 15-38

解 1 作此题时，要注意灵活运用公式（10），此题的旋转轴是 $x=4$ 而不是 y 轴，公式（9）中的 x，此时应为 $4-x$，又 $h(x)=8-x^{\frac{3}{2}}$ 故

$$V=2\pi\int_0^4(4-x)(8-x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{3456}{35}\pi$$

解 2 先求矩形 $OEFG$ 绕 $x=4$ 旋转所得体积，然后再减去 OEF 绕 $x=4$ 旋转所得体积，即得所求（图15-39）。

$$V=\pi\int_0^8 4^2dy-\pi\int_0^8(4-x)^2dy$$

$$=\pi\int_0^8 16dy-\pi\int_0^8(4-y^{\frac{2}{3}})^2dy$$

$$=\frac{3456}{35}\pi$$

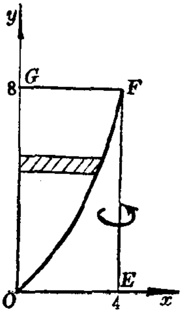


图 15-39

例 11 求半径为 a 的圆 $(x-b)^2+y^2=a^2$ 绕 y 轴旋转所得的环体体积（图15-40）。

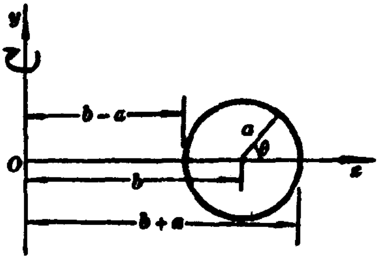


图 15-40

解 此题在本节例 4 中已作过，现用此圆的参数形式，并用剥壳法公式解之如下：

$$\begin{cases} x=b+a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$$

x	$b-a$	$b+a$
θ	π	0

$$\frac{V}{2}=2\pi\int_{b-a}^{b+a} xh(x)dx$$

$$=2\pi\int_{\pi}^{0}(b+a\cos\theta)a\sin\theta(-a\sin\theta)d\theta$$

$$=2\pi a^2 b\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta+2\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\sin\theta$$

$$=2\pi a^2 b\left[\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta\cos\theta)\right]_0^{\pi}+2\pi a^3\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi^2a^2b$$

所以　$V=2\pi^2a^2b$，这与例 4 的结果一样。

简　短　小　结

从例10中看出，解法一由于用了公式（ 9 ）所以计算简单，例11由于用了公式（ 9 ）也比在例 4 中的计算变得简单了。

无论在处理面积问题还是体积问题。我们看出都是运用本节一开始所讲述的元素相加法，现在我们把这一方法简要的归纳如下：

第一步：把所需要求的量分为 n 份。

第二步：将每一份用 $f(x_i)\Delta x_i$ 来近似表达，其中 $f(x)$ 是已知的连续函数。

第三步：取当每个 $\Delta x_i\to 0$ 时，和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

的极限。

第四步：根据已知的上下限将极限表示为定积分形式，最后进行计算。

以上的步骤中，第二步是最重要的。不同的问题要作不同的分析。

习　题　15-2

1．试求下列各面积绕 y 轴旋转所得的体积。

1）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；

2）$y^2=x^3$，x 轴，$x=4$；

3）$y=2x-x^2$，$y=0$；

4*）$y=\sin x$，$y=0$　（$0\leqslant x\leqslant\pi$）；

5）$y=e^{-x}$，$y=0$　（$0\leqslant x<+\infty$）；

6）$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$；

7）抛物线$x^2=8y$，$y=2$；

8）双曲线$9x^2-16y^2=144$，$y=3$，$y=0$；

9）两轴与$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$。

答：1）$\frac{4\pi a^2b}{3}$；2）$\frac{512}{7}\pi$；3）$\frac{8}{3}\pi$；4）$2\pi^2$(第4题提示：$y=\sin x$在$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$上的反函数是$\pi-\arcsin y$)；5）发散；6）$64\pi$；7）$16\pi$；8）$64\pi$；9）$\frac{\pi a^3}{15}$。

2．求下列各曲线所围成的面积绕 x 轴的旋转体。

1）$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 在$0\leqslant t\leqslant 2\pi$间一段；

2 ）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-c)^2}{b^2}=1$；

3 ）$y=x^2$，$y^2=x$；

4 ）$y^2=x^3$，x 轴，$x=4$；

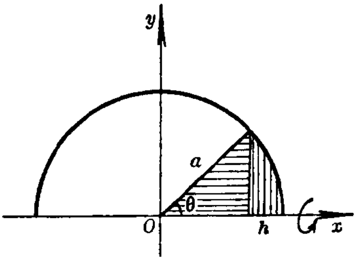
5 ）$y^2=x^3$，y轴，$y=8$；

6 ）$y=e^{-x}$，$y=0$，$x=0$，$x=h$。

答：1 ）$5\pi^2a^3$；2 ）$2\pi^2abc$；3 ）$\frac{3\pi}{10}$；4 ）64π；5 ）192π；6 ）$\frac{\pi(1-e^{-2h})}{2}$。

3*.扇形的半径长为a，其圆心角为θ，证此扇形绕半径旋转之体积为$\frac{2}{3}\pi a^2h$（$h=a-a\cos\theta$）。提示：

$$V=\pi\int_0^{a\cos\theta}\mathrm{tg}^2\theta x^2dx+\pi\int_{a\cos\theta}^{a}(a^2-x^2)dx$$



第 3 题 图

4.$y=2x-x^2$与$y=0$所包围面积绕 y 轴旋转所成的体积。

答：$\frac{8\pi}{3}$。

5*. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 绕 y 轴与$y=2a$旋转所成的体积。

答：$6\pi^3a^2$；$7\pi^2a^3$。

6. $y^2=x^3$，x轴，$x=4$；绕$x=4$。

答：$\dfrac{1024\pi}{35}$。

7. $y^2=x^3$，x轴上面，$x=4$；绕$y=8$。

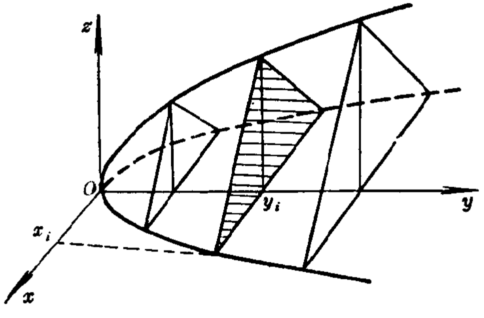
答：$\dfrac{704\pi}{5}$。

8. $y^2=x^3$，y轴，$y=8$；绕$y=8$。

答：$\dfrac{576\pi}{5}$。

9.设边长可变而三边恒等的等边三角形，在移动时保持它的平面垂直于y轴，且其底边的一个顶点总是沿着抛物线$y^2=4ax$的正的分支上移动，问这个等边三角形由坐标原点移动到横坐标为a点时，它掠过的这部分空间的体积是多少？

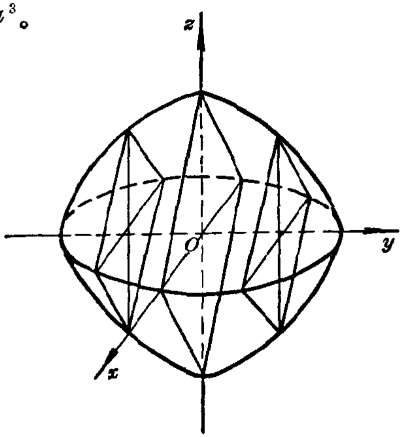
答：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$。



第 9 题

10. 设边长可变而四边恒等的正方形，在移动时保持它的平面垂直于半径为 a 的圆的平面，且它的对角线的交点总是沿着圆的某一固定直径上移动，而它的一条对角线的两个端点总是沿着圆周上移动，问这个正方形从圆的直径的起点移动到终点时，它掠过的这部分空间的体积是多少？

答：$\frac{8}{3}a^3$。



第10题

11. 圆锥体高为 h，底半径为 r，试用下列三种方法求其体积。

①用一套平行圆锥体底面的平面组来分割，即每一真元素是一小薄的圆台。

②用一套圆柱面（圆柱面之底与圆锥底面为同心圆）来分割。即每一个真元素近似一个空心圆筒。

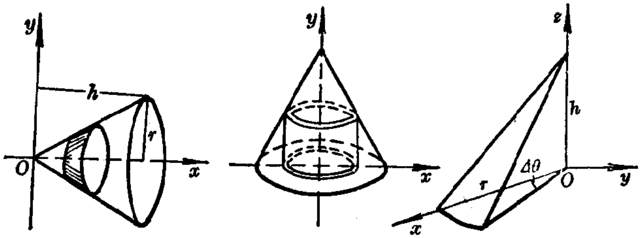
③*用一套过圆锥轴心（顶点与底的圆心连线）的平面来分割，即每一真元素近似于四面体（四面锥）。

提示：①用旋转体公式（7）；

②用剥壳公式（ 9 ）；

③ $\Delta v_i=\dfrac{1}{3}h\left(\dfrac{1}{2}r^2\Delta\theta_i\right)$。

答：$\dfrac{1}{3}\pi r^3h$。



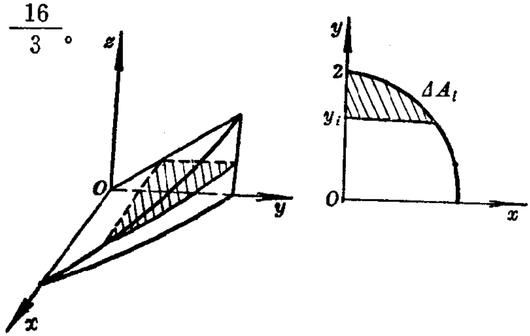
第11题 图

12*.用下法求圆柱体 $x^2+y^2=4$ 与平面 $y=z$，$z=0$之间的体积。用一套平行于 xOy 坐标面之平行平面组，来分割。

提示：$\Delta A_i=\displaystyle\int_{y_i}^{2}\sqrt{4-y_i^2}\,dy_i$

$$=\pi-\frac{y_i}{2}\sqrt{4-y_i^2}-2\arcsin\frac{y_i}{2}$$

答：$\dfrac{16}{3}$。

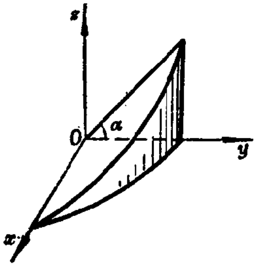


第12题 图

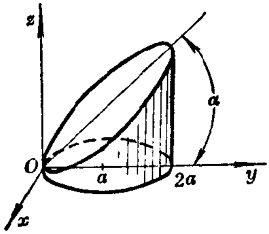
13*. 求圆柱体底圆为 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $z=(\mathrm{tg}\alpha)y$，（α 为常数）$z=0$ 所成的体积。

提示：$\Delta V_i=\frac{1}{2}y_i z_i \Delta x_i$，但 $z_i=(\mathrm{tg}\alpha)y_i$

答：$\frac{2}{3}a^3\mathrm{tg}\alpha$。



第13题　图

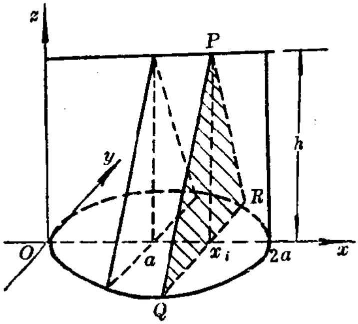


第14题　图

14*. 求圆柱体底圆为 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 与平面 $z=(\mathrm{tg}\alpha)y$，$z=0$ 所围成的体积。

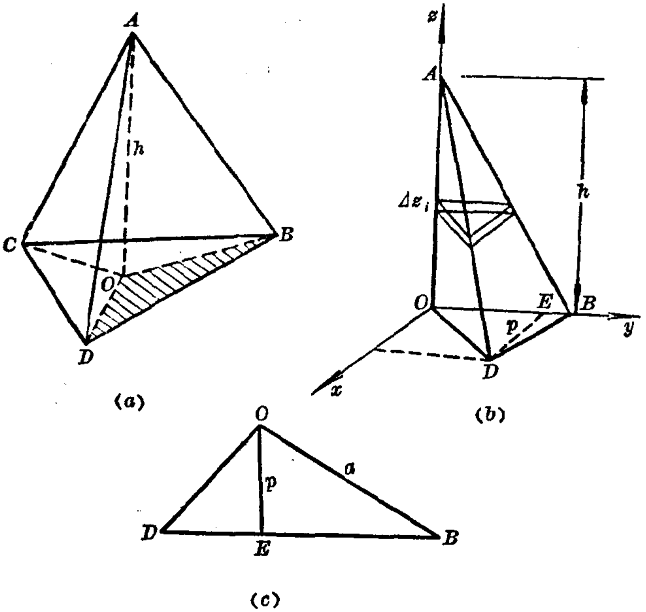
答：$\pi a^3\mathrm{tg}\alpha$。

15. 正劈锥其底的方程为 $(x-a^2)+y^2=a^2$，高为 h，求其体积。



第15题　图

16*.用元素相加法求四面锥（即四面体）之体积。



第16题 图

提示：先由顶点A向底BCD作垂线得高为 h，把原四面体分为三个四面体。先把其中一个（如$AODB$）安放在坐标轴上，进行计算，其它计算相同。

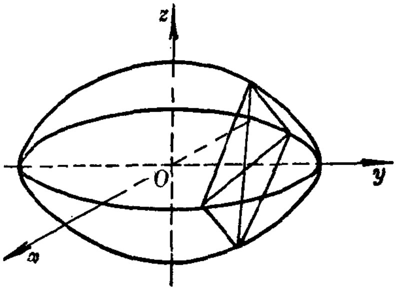
$$\Delta V_i=\frac{1}{2}x_i y_i \Delta z_i$$

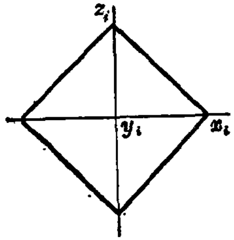
又 $y_i:a=x_i:p$，　所以 $x_i=\frac{p}{a}y_i$

$(h-z_i):y_i=h:a$，所以 $y_i=\frac{a}{h}(h-z_i)$

答：$\frac{1}{3}Sh$（S为四面锥底面积CBD）。

17.有一种球叫鲁倍球，为说明方便，将此球适当的放入坐标系中，则xOy坐标面与yOz坐标面和此球均截出一个椭圆，其长轴为16，短轴为8，而平行xOz坐标之平面，与此





第17题　图

球截面为一正方形，此正方形之顶点在上述两椭圆上，求此鲁倍球之体积。

提示：$\frac{z^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1, \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$

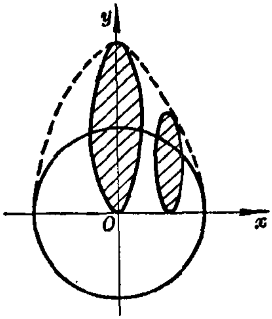
$$\Delta A_i=\frac{1}{2}(2x_i \times 2z_i)=2x_iz_i=2x_i{}^2$$

$$\Delta V_i=2x_i^2\Delta y_i$$

$$=2\times 16\left(1-\frac{y_i{}^2}{64}\right)\Delta y_i$$

答：$V=341\frac{1}{3}$。

18.半径变动之圆如下法移动，动圆圆心在圆 $x^2+y^2=r^2$ 之圆周上移动，动圆圆周恒有一点在x轴上，且动圆之所在平面垂直于x



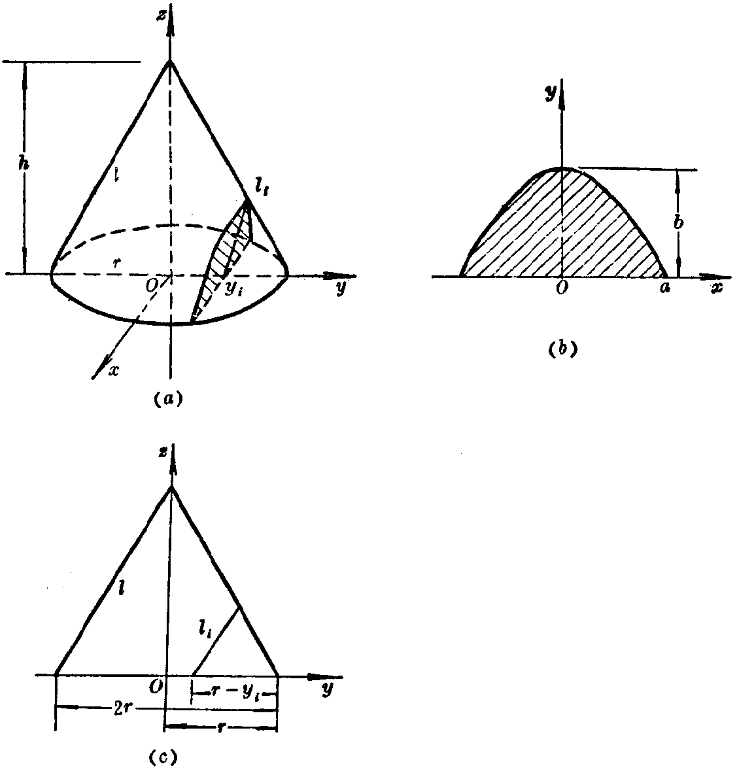
第18题　图

轴，求此动圆所造成之体积。

答：$V=\frac{8}{3}\pi r^3$。

19*.用一套平行于圆锥体母线之平面来分割正圆锥（即每一真元素近似一片抛物线弓形）的方法计算其体积。

答：$\frac{1}{3}\pi r^2 h$。



第19题　图

提示：由图 b 有 $y=-\frac{b}{a^2}x^2+b$，所以抛物线截头面积 $A=2\int_0^a\left(-\frac{b}{a^2}x^2+b\right)dx=\frac{4}{3}ab$，应用此结果在图 a 中阴影面积 $\Delta A_i=\frac{4}{3}x_il_i$，但$x_i=\sqrt{r^2-y_i^2}$，又由图 c 有$\frac{l_i}{l}=\frac{r-y_i}{2r}$，所以

$$l_i=\frac{r-y_i}{2r}l=\frac{r-y_i}{2r}\sqrt{h^2+r^2}$$

因得 $\Delta A_i=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}(r-y_i)\sqrt{r^2-y_i^2}$

$$\Delta v_i=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r}(r-y_i)\sqrt{r^2-y_i^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}}\Delta y_i$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{r}(r-y_i)\sqrt{r^2-y_i^2}\,\Delta y_i$$

答：$\frac{1}{3}\pi r^2h$。

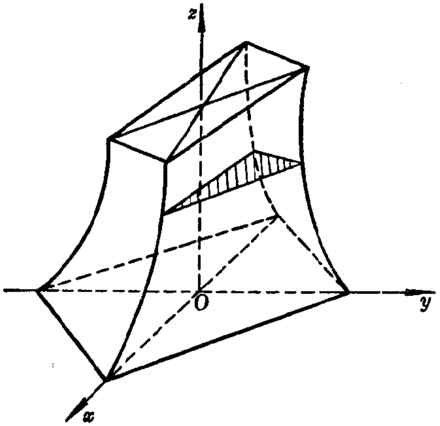
20*.由四条相同抛物线的下半部组成的高为60米的无线电塔，其水平截面为正方形，正方形之四角位于四个相同的抛物线上，两对角的抛物线分别形成两个平面，这两个平面的交线就是塔的轴线。抛物线的轴分别与塔顶平面两对角线重合。塔之上底对角线长 2 米，下底对角线长12米。试求塔的体积。

提示：$(z-60)^2=720(y-1)$

$(z-60)^2=720(x-1)$

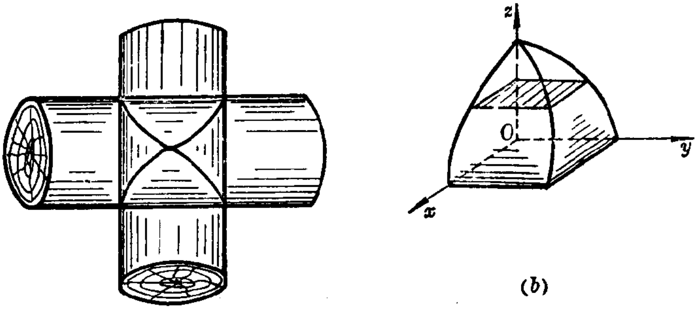
$$\Delta V_i=2x_iy_i\Delta z_i$$

答：$V=1120$立方米。



第20题　图

21.两个相同的圆柱体垂直相交（ 即两者之 轴垂直且相交）求其公共部分之体积。



(a)　(b)

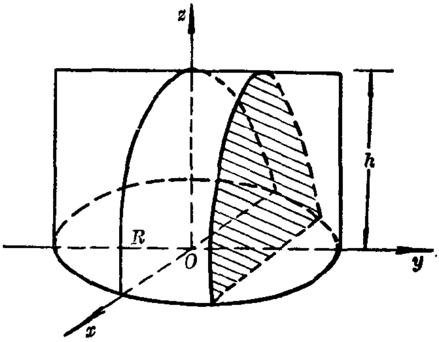
第21题　图

提示：设两圆柱的方程为：

$x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$，$\frac{1}{8}V_i=x_iy_i\Delta z_i$

答：$V=\frac{16}{3}a^3$。

22*.在半径为R之圆的所有平行弦上作定高为h之抛物线弓形，又此弓形垂直于圆所在的平面，求此物体之体积。



第22题　图

提示：利用19题，抛物线截头面积的结果，我们有：

$\Delta V_i=\frac{4}{3}hx_i\Delta y_i$

答：$V=\frac{2}{3}\pi R^2h$。

23*.求椭球

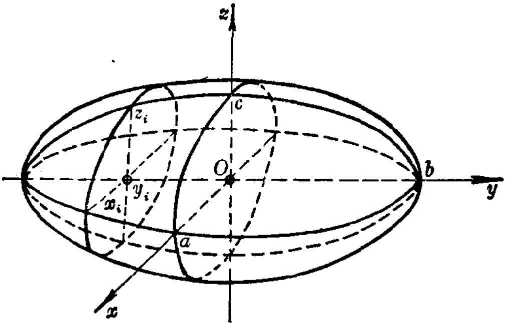
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的体积。

答：$\frac{4}{3}\pi abc$。

提示：由椭圆的面积公式有：

$$\Delta V_i=\pi x_i z_i\Delta y_i$$



第23题　图

又　$x_i = a\sqrt{1-\frac{y_i^2}{b^2}}$，　$z_i = c\sqrt{1-\frac{y_i^2}{b^2}}$

所以　$$\Delta V_i = \pi ac\left(1-\frac{y_i^2}{b^2}\right)\Delta y_i$$

24*．两个等高的斜圆柱体，其上底（圆）相重合，其下底（圆）相等且相切，求其公共部分之体积（图a）。

答：$V=\frac{4}{3}r^2h$（图a）。

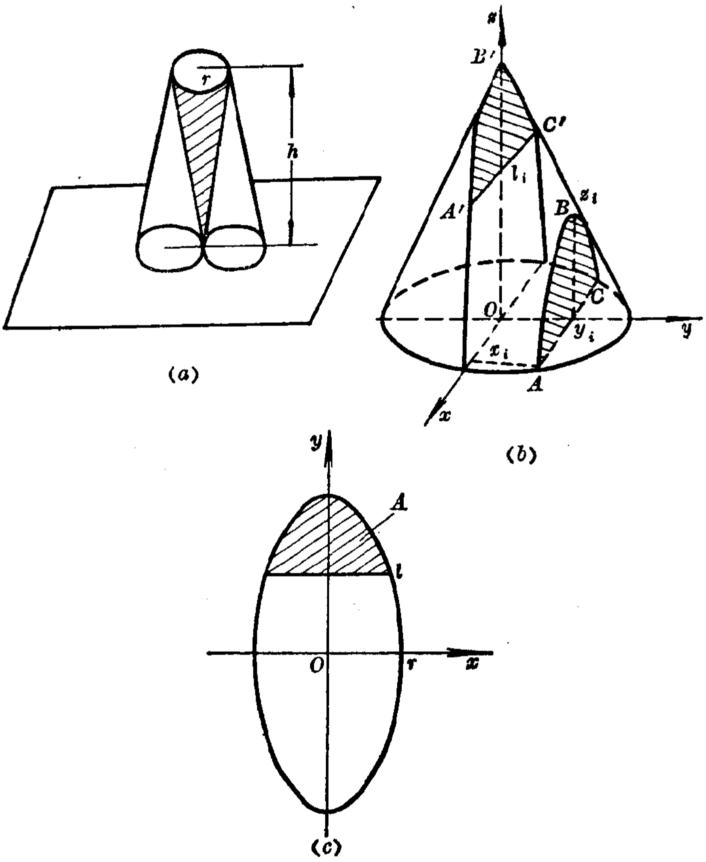
提示：此公共部分的截面（图b 中ABC）相当于椭圆上的一段面积（图 c 阴影部分）。

图 c 的方程为：

$$\frac{y^2}{h^2}+\frac{x^2}{r^2}=1$$

所以　$$x=\frac{r}{h}\sqrt{h^2-y^2}$$

今设图 c 中阴影部分的面积为 A，则



第24题　图

$$A=\frac{2r}{h}\int_{l}^{h}\sqrt{h^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{rh\pi}{2}-\frac{rl}{h}\sqrt{h^2-l^2}-hr\arcsin\frac{l}{h}$$

若将图b中ABC平移到$A'B'C$位置，故$l_i = h - z_i$

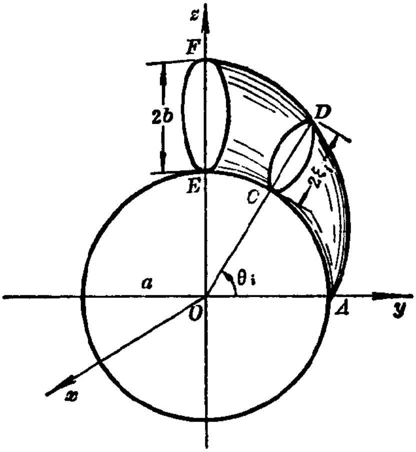
所以 $$\Delta A_i = \frac{rh\pi}{2} - \frac{r(h-z_i)}{h}\sqrt{h^2-(h-z_i)^2} - hr\arcsin\frac{h-z_i}{h}$$

但 $$z_i = \frac{h}{r}(r - y_i)$$

所以 $$\Delta A_i = \frac{rh\pi}{2} - \frac{h}{r}y_i\sqrt{r^2-y_i^2} - hr\arcsin\frac{y_i}{r}$$

而 $$\Delta V_i = 2\Delta A_i \Delta y_i$$

25*.一号角$ACEFD$（见图），系以半径渐增之圆为其截面，其一边则与一圆周（半径为a）相切如图，设通过圆中心而与半径OA作θ_i角直线适与号角截面相交于其直径CD，CD之长$2\xi_i$则与θ_i角成正比，而当$\theta_i = \frac{\pi}{2}$时，此直径EF则为$2b$，试求此号角之体积。



第25题 图

答：$V=\frac{1}{24}\pi^2 b^2(4a+3b)$。

提示：圆为$y^2+z^2=a^2$，设$\xi=k\theta$，因$b=\frac{\pi}{2}k$，即$k=\frac{2b}{\pi}$，所以$\xi_i=\frac{2b}{\pi}\theta_i$，用环体公式（例 4 或例11）$2\pi^2a^2b$，考虑号角的一段以环体的一段来近似，即

$$\Delta V_i\approx 2\pi^2\xi_i^2(a+\xi_i)\frac{\Delta\theta_i}{2\pi}$$

$$=\pi\left(\frac{2b\theta_i}{\pi}\right)^2\left(a+\frac{2b}{\pi}\theta_i\right)\Delta\theta_i$$

26*. 在一半径为 2 寸的圆柱中腰部分垂直此圆柱之轴凿一每边为 2 寸的方孔，问凿掉的部分体积多大？

答：$\frac{4}{3}(3\sqrt{3}+2\pi)$。

提示：设圆柱的方程为$z^2+y^2=4$，则$\frac{1}{4}\Delta V_i\approx 2xy_i\Delta z_i$，此处$x=1$。

27*. 一汽油桶为由椭圆旋转体去其相等的两头而成，设此桶的上下底半径为r，中腰半径为R，而其高为h，试求其体积。

答：$\frac{\pi h(2R^2+r^2)}{3}$。

提示：先设此椭圆的方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，然后利用它过（0，$R$），$\left(\frac{h}{2},\ r\right)$，求出$a=$？，$b=$？以下再按此椭圆旋转的一部分求之即得。

（三）曲线的弧长

在初等几何中求圆周长所用的方法是利用内接正多边形的边长作为圆周的近似值，再令边数无限增多而取极限，以定出圆周长，现在我们也要用类似的方法来建立任意连续曲线弧长的概念，从而应用定积分来计算弧长。

定义　**设A，B是曲线弧上的两个端点。在$\widehat{AB}$上任意取n个分点$A=M_0$，M_1，M_2，……，M_{i-1}，M_i，……，M_{n-1}，$M_n=B$，依次连接每两个分点得一条内接折线（图15-41），当分点的数目n无限增加且每个弦长$|M_{i-1},M_i|$趋向零时，如果此折线长的极限存在，则称此极限为曲线在A，B两点间的弧长，此时该段曲线称为可求长；如果折线长的极限不存在，则这段曲线称为不可求长。**

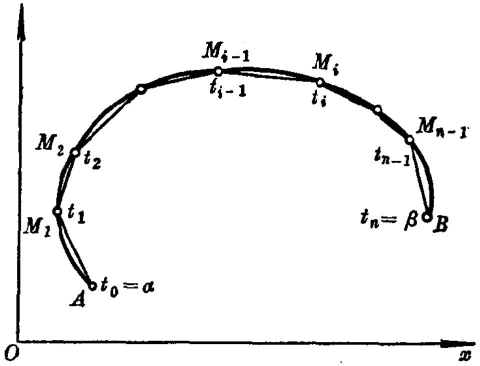


图 15-41

例 1　圆周是可求长的，由初等几何可知，内接于圆的任一多边形的周界都小于同圆的外切多边形(例如正方形)，如图15-42所示。

当内接正多边形的边数继续增多，则此折线为一增数列，且有界，所以必有极限，此极限即是圆周之长。

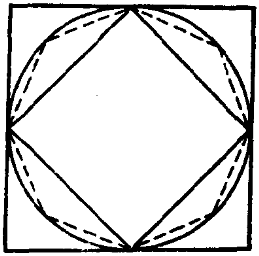


图 15-42

例 2 在平面上取两个点的数列：

$A_1(1,\ 1)$，$A_2\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，…，$A_n\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}\right)$，……

$B_1(1,\ 0)$，$B_2\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，…，$B_n\left(\frac{1}{n},\ 0\right)$，……

则过B_1、A_2、B_3、A_4、…，O各点所构成的曲线是不可求长的。

这条曲线是在区间[0，1]上连续函数 $y=f(x)$ 的图形，通过B_1、A_2、B_3、A_4，……，O各点作折线，得无限个线段B_1A_2，A_2B_3，B_3A_4，A_4B_5，……，$A_{2n}B_{2n+1}$，$B_{2n+1}A_{2n+2}$，……（图15-43）这个内接于此曲线的折线构成折线数列

$B_1A_2B_3O$，$B_1A_2B_3A_4B_5O$，$B_1A_2\cdots B_rO$，…等（图15-44），每一个斜线B_1A_2和A_2B_3的长都大于垂线A_2B_2的长，因此第一个折线的周界L_1大于$2\times\frac{1}{2}=1$，同理，继后的折线的长依次满足不等式

$$L_2>1+2\times\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}$$

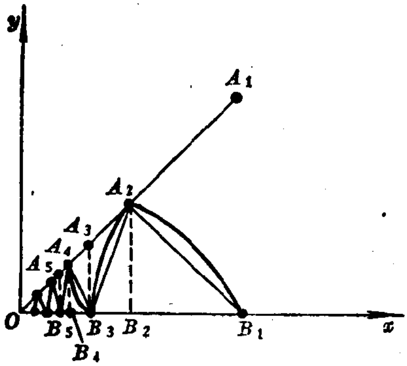


图 15-43

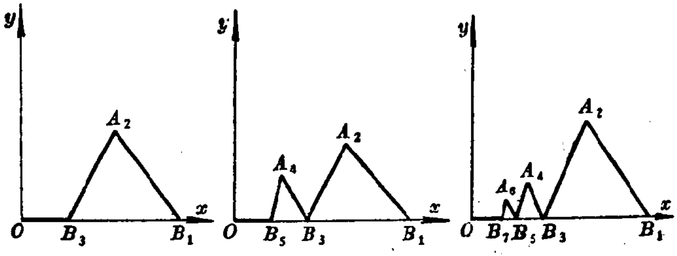


图 15-44

$$L_3>1+\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

将来在级数一章中不难证明

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

当n增大时S_n将趋向无穷（证明见后级数一章），折线之和也将趋于无穷，所以给定的曲线是不可求长的。

定理　**设曲线C的参数方程是**

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

当t由α变到β（$\alpha<\beta$）时，点$M(x, y)$画出由$A(x_0, y_0)$到$B(x, y)$的曲线弧C。如果在区间$[\alpha, \beta]$上函数$\varphi(t)$，$\psi(t)$具有连续导数$\varphi'(t)$，$\psi'(t)$，则C是可求长的，并且弧$\overset{\frown}{AB}$的长度s等于定积分：

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \qquad (12)$$

证　在弧$\overset{\frown}{AB}$上取分点：

$A=M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{i-1}, M_i, \cdots, M_{n-1}, M_n=B$，各对应于参数$t$的值。

$\alpha=t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_i, \cdots, t_{n-1}, t_n=\beta$

把点M_i的坐标记作：

$$x_i=\varphi(t_i),\quad y_i=\psi(t_i)$$

根据解析几何可知：弦$\overline{M_{i-1}M_i}$的长是：

$$|M_{i-1}M_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$$
$$=\sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}$$

应用拉格朗日中值定理有：

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})\varphi'(\tau_i)$$
$$\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})\psi'(\tau_i')$$

其中τ_i，τ_i'都在同一区间(t_{i-1}, t_i)内，从而

$$|M_{i-1}M_i|=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}\,(t_i-t_{i-1})$$

若把在根号下的$\psi'^2(\tau_i')$用$\psi'^2(\tau_i)$代替，其所产生的误差设为ε_i，也就是设

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}+\varepsilon_i$$

则　$$|M_{i-1}M_i|=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,(t_i-t_{i-1})+\varepsilon_i(t_i-t_{i-1})$$

当n无限增加而每个差t_i-t_{i-1}无限减小时，则每个弦长

$|M_{i-1}M_i|$ 也就无限减少；根据连续函数$\varphi'(t)\psi'(t)$ 在闭区间$[\alpha, \beta]$上的一致连续性，不难证明上式右边的第二和式的极限为零。

即
$$\lim \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t_i-t_{i-1})=0$$ ❶

而根据定积分存在定理，第一和式的极限是定积分，即

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}\,(t_i-t_{i-1})$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

因为上式左边极限的存在，也就是折线长的极限存在，因此曲线弧C是可求长的。并且它的长s可以表示为定积分(12)。

若考虑的曲线弧是由定点A到对应的参数为t的变点M，显然，弧$\widehat{AM}$的长度是t的函数，记作$s(t)$，则由公式(12)得：

$$s(t)=\int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

对积分的上限t求导数，就有：

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

---

❶ 函数的一致连续性即对于任意小的正数ε，必存在一个正数δ，当$t_i-t_{i-1}<\delta(i=1, 2, \cdots, n)$时能使每个

$$\varepsilon_i=\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i')}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\tau_i)}$$

的绝对值小于共同的ε，因此

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t_i-t_{i-1})\right|<\varepsilon \sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=\varepsilon(\beta-\alpha)$$

但ε是任意的，所以$\lim \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t_i-t_{i-1})=0$。

因得弧微分ds为：

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

因为我们规定s是t的增加函数，$ds>0$，所以根号前取（＋）号，如果不作这样的规定，则根号前应附以（±）号。

若把上式两边平方，即得：

$$ds^2=dx^2+dy^2 \text{❶}$$

当曲线的直角坐标方程为：

$$y=f(x)$$

---

❶ 在以前我们曾讲过弧微分，在那里我们曾借用了这样一个假设，即

$$\lim_{P_{i+1}\to P_i}\frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\overset{\frown}{P_iP_{i+1}}}=1 \text{（图15-45）}$$

现在我们把它证明如下：

证　因为当$P_{i+1}\to P_i$时，割线P_iP_{i+1}即趋于切线P_iT，所以

$$\lim_{P_{i+1}\to P_i}\left(\frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\overset{\frown}{P_iP_{i+1}}}\right)^2=\frac{dx^2+dy^2}{ds^2}=\frac{ds^2}{ds^2}=1$$

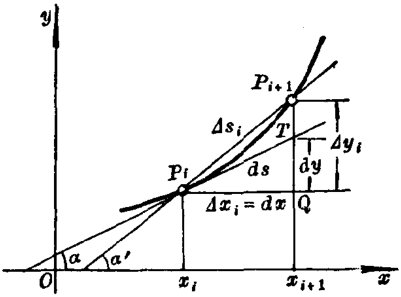


图 15-45

我们可以把方程写成参数方程形式：

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}$$

此时 x 既可视为自变量，又可视为参数。于是曲线弧的端点 A 与 B 各对应于自变量 x 的值 a 与 b（$a < b$），当导数 $y' = f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续时，公式（12）就成为：

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \qquad (13)$$

[这里 $\varphi(t)$ 相当于 x；$\psi(t)$ 相当于 $f(x)$。所以 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 就分别相当于 1 及 $f'(x)$]。

如果曲线是由极坐标系表示出来的：$\rho = \rho(\theta)$

则由直角坐标与极坐标的关系式：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

视 θ 为参数，就得到曲线在极坐标系中的参数表示式。因有：

$$dx = \cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta$$

$$dy = \sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta$$

从而在极坐标系中的弧微分的平方为：

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 &= [\cos\theta d\rho - \rho\sin\theta d\theta]^2 \\ &\quad + [\sin\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta]^2 \\ &= \cos^2\theta d\rho^2 - 2\rho\cos\theta\sin\theta d\rho d\theta + \rho^2\sin^2\theta d\theta^2 \\ &\quad + \sin^2\theta d\rho^2 + 2\rho\sin\theta\cos\theta d\rho d\theta + \rho^2\cos^2\theta d\theta^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

若曲线的端点 A 与 B 各对应于 θ 的值分别为 α 与 β（$\alpha < \beta$），这时公式（12）即化为：

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \qquad (14)$$

例 1 求摆线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱的弧长（图15-46）。

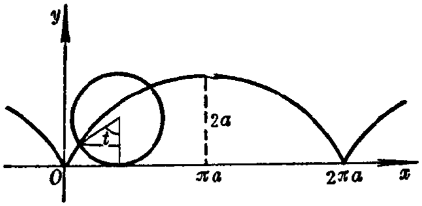


图 15-46

解 $ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt$

$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$

$=2a\sin\frac{t}{2}dt$

故 $s=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)$

$=-4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-4a[-1-1]=8a$

例 2 自悬链线

$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\cos h\frac{x}{a}$（$a>0$）（图15-47）

的顶点A到其上另一点M（x，y）的弧长为$\widehat{AM}$，求证

$$a^2+(\widehat{AM})^2=y^2$$

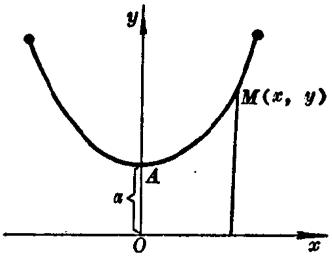


图 15-47

解 因为$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sinh\frac{x}{a}$,

$$1+y'^2=1+\sinh^2\frac{x}{a}=\cosh^2\frac{x}{a}$$

代入公式（13）

$$\widehat{AM}=\int_0^x\cosh\frac{x}{a}dx=a\sinh\frac{x}{a}$$

于是

$$a^2+\left(\widehat{AM}\right)^2=a^2+a^2\sinh^2\frac{x}{a}=a^2\cosh^2\frac{x}{a}=y^2$$

例 3 求对数螺线$\rho=e^{a\theta}$从矢径$\theta=\alpha$到$\theta=\beta$之间的弧长（图15-48）。

解 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

$$=\sqrt{1+a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta}-e^{a\alpha})$$

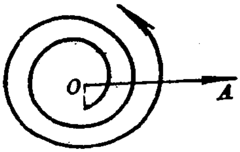


图 15-48

习 题 15-3

1.计算下列各曲线弧段之弧长。

1）$ay^2=x^3$，从$x=0$到$x=5a$；

2）$y=1-\ln\cos x$，从$x=0$到$x=\frac{\pi}{4}$之间；

3）计算圆周$\rho=2a\sin\theta$的长；

4）计算曲线 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$

从$t=0$到$t=t_1$之间的弧长；

5）求 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$

的弧长；

6）求$\rho=a(1+\cos\theta)$的弧长；

7）求$\rho=a\theta(0\leqslant\theta\leqslant\alpha)$的弧长；

8）求$\rho=a\sin^3\frac{\theta}{3}$的弧长，提示：$\theta$由0到$3\pi$。

答：1）$\frac{335}{27}a$；2）$\ln(1+\sqrt{2})$；3）$2\pi a$；4）$\frac{1}{2}at_1^2$；5）$6a$；6）$8a$；7）$\frac{a}{2}[\alpha\sqrt{1+\alpha^2}+\text{arcsinh}a]$；8）$\frac{3}{2}\pi a$。

2.求下列曲线在指定弧段上的弧长。

1）求抛物线$x^2=4py$由$(0,0)$到$(2p,p)$段的弧长；

2）$y=\ln x$由$x=1$到$x=3$；

3）$y=x^{\frac{3}{2}}$由$x=0$到$x=4$；

4）$x=\frac{1}{2}\ln(t^2-1)$，$y=\sqrt{t^2-1}$，由$t=3$到$t=7$；

5) $y=\ln(1-x^2)$, 由$x=0$ 到 $x=\frac{3}{4}$;

6) $y=\ln\cos x$, 由$x=0$到 $x=\frac{\pi}{3}$;

7) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, 由$x=-1$到1;

8) $\rho=2\theta^2$, 由$\theta=0$到$\theta=3$;

9) $\rho=e^{-\theta}$, 由$\theta=-\pi$到$\theta=\pi$;

10) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, 由$t=0$到$t=2$;

11) $9ay^2=x(x-3a)^2$, 由$x=0$到$x=3a$。

答: 1) $\sqrt{2}\,p+p\ln(1+\sqrt{2})$;

2) $\sqrt{10}-\sqrt{2}+\ln\left[\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{10}-1)}{3}\right]$;

3) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$;

4) $4+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$;

5) $-\frac{3}{4}+\ln 7$; 6) $\ln(2+\sqrt{3})$;

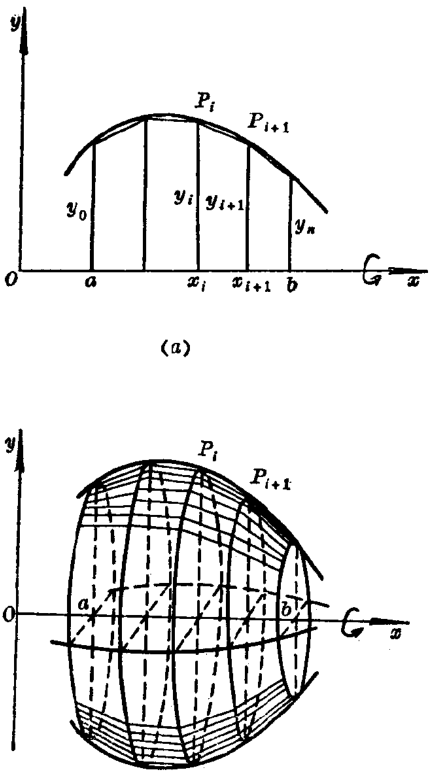
7) $e-e^{-1}$; 8) $\frac{2}{3}(13\sqrt{13}-8)$;

9) $\sqrt{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$; 10) $\sqrt{2}(e^2-1)$;

11) $2a\sqrt{3}$。

（四）旋转面

在考虑旋转面问题时，和考虑弧长相类似，先把曲线分成若干段，然后把每一小段曲线以直线来代替(图15-49a)，曲线段绕坐标轴旋转所得之曲面面积为旋转面，现在用折线



(a)

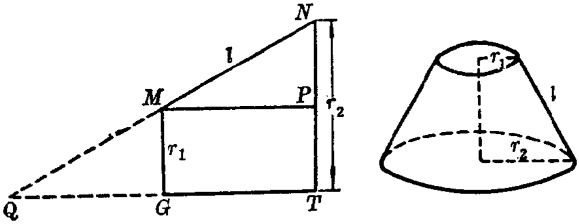
(b)

图 15-49

绕坐标轴旋转所成的圆台面积来近似旋转面（图15-49 b）。

如在$[x_i, x_{i+1}]$上本来应当考虑$\widehat{P_iP_{i+1}}$绕x轴旋转得的曲面，而现在以弦$\overline{P_iP_{i+1}}$绕x轴所得的圆台来代替。为此，须先把圆台的侧面积的公式计算出来：

因圆锥的侧面积为πrl（l为圆锥的斜高，r为其底半



(a)　　　　　　(b)

图 15-50

径），设S为圆台的侧面积，由图15-50 a 知

$$S=\pi(r_2\overline{QN}-r_1\overline{QM}),\quad 因\overline{QN}=\overline{QM}+l$$

所以

$$S=\pi(r_2\overline{QM}+r_2l-r_1\overline{QM})=\pi(r_2-r_1)\overline{QM}+\pi r_2 l$$

又因 $\triangle MNP\backsim\triangle QMG$，所以$\dfrac{r_2-r_1}{l}=\dfrac{r_1}{\overline{QM}}$（图 15-50 a）。

即　$(r_2-r_1)\overline{QM}=r_1 l$，因得$S=\pi(r_1+r_2)l$

现在把最后得到的这个公式应用到旋转面上。

$$\Delta S_i\approx\pi(y_i+y_{i+1})(\Delta x_i{}^2+\Delta y_i{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pi(y_i+y_{i+1})\left[1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\ \Delta x_i$$

而　$$\Delta y_i=f(x_{i+1})-f(x_i)=f'(\xi_i)\Delta x_i$$

则　$$\Delta S_i\approx\pi[f(x_i)+f(x_{i+1})][1+f'(\xi_i)^2]^{\frac{1}{2}}\ \Delta x_i$$

所以：$$S_x\approx\sum_{i=0}^{n-1}\pi[f(x_i)+f(x_{i+1})][1+f'(\xi_i)^2]^{\frac{1}{2}}\ \Delta x_i$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\pi f(x_i)[1+f'(\xi_i)^2]^{\frac{1}{2}}\ \Delta x_i$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\pi f(x_{i+1})[1+f'(\xi_i)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x_i$$

取极限后，就有：

$$S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \qquad (15)$$

同理，绕 y 轴的旋转面公式为：

$$S_y=2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dy \qquad (16)$$

若所给曲线为参数表示式：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

则相应于（15）、（16）的两个公式为：

$$S_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (17)$$

$$S_y=2\pi\int_{t_3}^{t_4}\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \qquad (18)$$

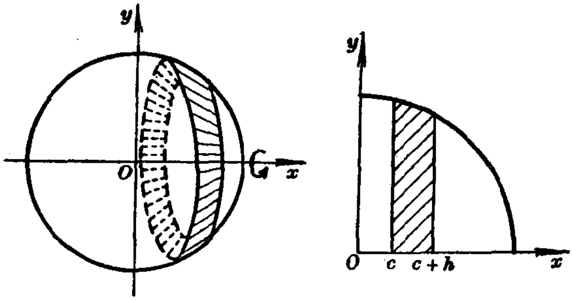
若所给的方程为极坐标 $\rho=f(\theta)$，则对应于（15）、（16）的两个公式为：

$$S_x=2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \qquad (19)$$

$$S_y=2\pi\int_\gamma^\delta \rho\cos\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \qquad (20)$$

以上公式（16）、（17）、（18）、（19）、（20）读者可作为练习予以推导。

例 1 求球带的面积（图15-51 a ）。



(a)　　　　(b)

图 15-51

解　设球为由圆$x^2+y^2=a^2$绕x轴旋转而成（图15-51a），而此球带之宽为h（图15-51 b）。

$$y'=-\frac{x}{y},\ 1+y'^2=1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2$$

$$=\frac{y^2+x^2}{y^2}=\frac{a^2}{y^2}$$

代入公式（1），$S_x=2\pi\int_c^{c+h} y\cdot\frac{a}{y}dx=2\pi ah$

当$h=2a$时，我们得到圆球的表面积为$4\pi a^2$。

例2　将曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$绕$x$轴旋转，求此旋转面面积（见图15-28 a、b）。

解 1　$$\frac{S_x}{2}=2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=2\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx$$

$$=2\pi a^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{3}{2}\right)\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}d\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=-3\pi a^{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{5}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}\right]_0^a$$

$$=\frac{6}{5}\pi a^2$$

$$\therefore \qquad S_x=\frac{12\pi a^2}{5}$$

解 2 若此星形线以参数方程表示（或者化成参数形式）

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t$$

则 $\dfrac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$

x	0	a
t	$\frac{\pi}{2}$	0

代入（3）中得：

$$\frac{1}{2}S_x=-2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

（因为S_x为正数，故上式右边需添一负号）

$$\therefore \frac{1}{2}S_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^2 t\cdot 3a\cos t\sin t\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$

$$=6a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos tdt=6a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4td\sin t$$

$$=6a^2\pi\left[\frac{\sin^5t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6\pi a^2}{5}\quad\therefore S_x=\frac{12\pi a^2}{5}$$

习 题 15-4

1.求立方抛物线$a^2y=x^3$上弧段$x=0$，$x=a$绕x轴旋转所成的旋转面面积。

答：$\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)a^2$。

2.求$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕$x$轴与$y$轴旋转的旋转面面积。

答：$S_x=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$，$\varepsilon$（表示离心率）$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$；$S_y=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2a}\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$。

3.设$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$；求此曲线绕x轴和绕y轴的旋转面。

答：同前题。

4*.求$x^2+y^2=a^2$在第一象限之弧绕其弦旋转所成之表面积。

提示：在第I象限圆的方程：$y=\sqrt{a^2-x^2}(0\leqslant x\leqslant a)$，在第I象限圆弧段的弦，其方程为：

$$Y=a\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$y^*=y-Y=\sqrt{a^2-x^2}-a\left(1-\frac{x}{a}\right)$将此弧段旋转

45°后，其弦重合于x轴的曲线段方程。

视y^*为曲线之y，再使用旋转面公式。

答：$\pi a^2\sqrt{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$。

5.求$y=x^2$与$x=y^2$所围之面积绕x轴旋转所成的表面积。

答：$\pi\left(\frac{67}{48}\sqrt{5}-\frac{1}{6}-\frac{\operatorname{arcsin}h2}{32}\right)$。

6.求$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$；$0\leqslant t\leqslant 2\pi$绕$x$轴旋转所成之表面积。

答：$\frac{64\pi a^2}{3}$。

7.求下列各曲线在指定区间绕x轴旋转的旋转面面积。

①$y=2\sqrt{x}$，由$x=0$到$x=8$；

② $y=\frac{1}{3}x^3$，由$x=0$到$x=2$；

③ $x=\sqrt{2}t^2$，$y=2t$，由$t=0$到$t=2$；

④ $y=\sin x$，由$x=0$到$x=\pi$；

⑤ $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，由$x=-1$到$x=1$。

答：①$\frac{208}{3}\pi$，②$\frac{\pi}{9}[17\sqrt{17}-1]$，③$\frac{104}{3}\pi$，④ $2\pi[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$，⑤$\frac{\pi}{2}(e^2+4-e^{-2})$。

8.求下列各曲线在指定区间绕y轴旋转的旋转面面积。

①$y=\ln x$，由$x=1$到$x=2\sqrt{2}$；

②$x=\cos 2y$，由$y=0$到$y=\frac{\pi}{4}$；

③$x^2+y^2=25$，由(4,3)到(3,4)。

答：①$\pi[5\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$；

②$\frac{\pi}{4}[2\sqrt{5}+\ln(\sqrt{5}+2)]$；

③$10\pi$。

9.求$y=mx$，由$x=0$到$x=1$绕x轴旋转的侧面积（圆锥台）。

答：$\pi m\sqrt{1+m^2}$。

10.求曲线$y=\cos x$,由$x=-\frac{\pi}{2}$到$x=\frac{\pi}{2}$绕x轴旋转的侧面积。

答：$2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$。

11.求抛物线$y^2=4px$由（0，0）到（p，$2p$）绕x轴和绕y轴的旋转面面积。

答：$S_x=\frac{8\pi p^2(2\sqrt{2}-1)}{3}$，

$$S_y=\pi p^2\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\ln(2\sqrt{2}+3)\right]。$$

12*.求由曲线$y^2=4x$与$y^2=x+3$所围成的面积绕x轴旋转的表面积。

答：$\frac{\pi[17(\sqrt{17}-1)+32\sqrt{2}]}{6}$。

13.求曲线$x=e^\theta\sin\theta$，$y=e^\theta\cos\theta$由$\theta=0$到$\theta=\frac{\pi}{2}$绕x轴和绕y轴的旋转面积。

答：$S_x=\frac{2\sqrt{2}\pi(e^\pi-2)}{5}$，$S_y=\frac{2\sqrt{2}\pi(2e^\pi+1)}{5}$。

14*.求环体绕x轴旋转的表面积。

提示：①用直角坐标系 方程$x^2+(y-a)^2=b^2$，$a>b$，考虑$S_x=S_1+S_2$；

此处S_1为用$y=a+\sqrt{b^2-x^2}$所得的旋转面；

S_2为用$y=a-\sqrt{b^2-x^2}$所得的旋转面。

②用直角坐标系参数方程 $x=b\cos\theta$，$y=a+b\sin\theta$，取θ由$\theta=0$到$\theta=2\pi$；

答：$4ab\pi^2$。

15.求$\rho=a(1+\cos\varphi)$绕极轴所成的旋转面积。

答：$32\pi a^2/5$。

§2 定积分在物理上的应用

现在我们开始讨论定积分在物理方面的应用。

（一）功

在本章开始时，我们曾以变力所作的功为例引出定积分概念，因此在理论上将不再作过多的探讨，只做具体例子说明如下：

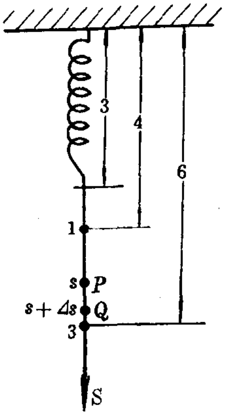


图 15-52

例 1 弹簧长 3 分米。当挂上 4 公斤的重量后，弹簧伸长到 5 分米。试求把这一弹簧从 4 分米拉长到 6 分米所作的功（图15-52）。

解 根据虎克定律，弹簧伸展的长度 s 与所受的力F成正比。即

$$F=ks$$

此处 k 为比例系数。由已知条件，以 4 公斤代换F，以 $5-3=2$ 分米代换 s，解出 k，即

$$4=k(5-3)，即4=2k \quad \therefore k=2$$

因得 $$F=2s$$

当弹簧从P点（坐标为s）至Q点（坐标为$s+\Delta s$）伸长为Δs，P点所受到的力（或称它为应力）由$F=2s$绘出，所以在由P到Q这一小段的过程中所作之功表之如下：

$$\Delta W \approx 2s\Delta s$$

因得整个过程由$s=1$到$s=3$所作之功为：

$$W=\int_1^3 2sds=[s^2]_1^3=8\text{公斤分米}$$

总之，若变力$F=F(s)$是物体移动距离s的函数，在这个力的作用下，物体沿力的方向由s_1到s_2，那么力所作功是：

$$W=\int_{s_1}^{s_2} F(s)ds \qquad (1)$$

例2　在底面积S的圆柱形容器中盛有一定量的气体，在等温条件下，由于气体的膨胀，把这容器中的一个活塞（面积为S）从点a处推移到点b处，试计算在这移动过程中，气体压力所作的功。

解　活塞的位置可以用坐标x来表示，由物理学知道，一定量的气体在等温条件下，压强p与体积V的乘积是常数k，即

$$pV=k\text{或}p=\frac{k}{V}$$

因为$V=xS$，所以

$$p=\frac{k}{2S}$$

于是，作用在活塞上的力

$$F=p\cdot S=\frac{k}{xS}\cdot S=\frac{k}{x}$$

在气体膨胀过程中，体积V是变的，因而x也是变的，所以作用在活塞上的力也是变的。取x为积分变量，它的变动范围为$[a,b]$，设$[x,x+\Delta x]$为$[a,b]$上的典型小区间，当活塞从x移动到$x+\Delta x$时，变力F所作的功近似于$\frac{k}{x}\Delta x$，因此，所求功为

$$W=\int_a^b\frac{k}{x}dx=k[\ln x]_a^b=k(\ln b-\ln a)=k\ln\frac{b}{a}$$

（二）平均值

如果多次测量一个量，由于每次测量都要产生一些误差，所以各次测值可能是参差不齐的，要在这些参差不齐的数中，选出一数作为它们的代表，最简单的办法就是用算术中值，或算术平均值。所谓$y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$的算术中值$\bar{y}$，其定义为：

$$\bar{y}_n=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n} \qquad (2)$$

例1 在等温过程中，求理想气体容积V_0膨胀到V_1时压强p的平均值$\overline{p}$。

对于理想气体$pv=RT$，在等温过程中T是常数，因此有：

$$\overline{p}=\frac{1}{V_1-V_0}\int_{V_0}^{V_1}\frac{RT}{V}dV=\frac{RT}{V_1-V_0}\ln\frac{V_1}{V_0}$$

例 2 求在第一象限的圆弧$x^2+y^2=R^2$上纵 坐 标 对于①横坐标x的算术中值，②对于圆弧的算术中值。

解 ①对于x的算术中值（在第一象限）

$$\bar{y}=\frac{1}{R-0}\int_0^R ydx=\frac{1}{R}\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{R}\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{R^2}{2}\mathrm{cscsin}\,\frac{x}{R}\right]_0^R$$

$$=\frac{\pi R}{4}\approx 0.785R$$

②对于圆弧的算术中值(在第一象限)

把第一象限的圆弧分为n个小弧段，其长为Δs_i，并且在每段内任意取一点$[\xi_i, f(\xi_i)]$，于是，函数$y=f(x)$对于该圆弧的算术中值为：

$$\bar{y}=\frac{1}{\frac{\pi R}{2}}\cdot\lim_{max|\Delta s_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta s_i$$

$$=\frac{2}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi R}{2}}yds$$

为了计算上的方便，我们把圆弧化为参数方程

$$\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases} \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

所以

$$\bar{y}=\frac{2}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\theta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$

但

$$\frac{dx}{d\theta}=-R\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=R\cos\theta$$

所以

$$\bar{y}=\frac{2}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin\theta d\theta=\frac{2R}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta$$

$$=\frac{2R}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2R}{\pi}\approx 0.637R$$

注意　由上述例题，可知求函数的算术中值时，必须指明是对于什么量的中值，才能有完全正确的意义。

例 3　求正弦交流电流的平均值。

解　因为正弦交流电流 i 是随着时间 t 变化的，变化的规律是：

$$i=I_m\sin\omega t$$

其中I_m是常量，为交流电流的最大值（图15-53），ω为角频率（是常量）。

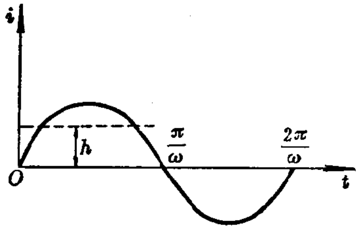


图 15-53

在$\left[0,\frac{\pi}{\omega}\right]$上电流的平均值为：

$$\bar{i}=\frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_m\sin\omega t dt=\frac{\omega}{\pi}I_m\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1}{\omega}\sin\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{I_m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{I_m}{\pi}[-\cos\omega t]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{I_m}{\pi}\left\{-\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{\omega}\right)-[-\cos(\omega\cdot 0)]\right\}$$

$$=\frac{I_m}{\pi}[-\cos(\pi)+\cos 0]$$

$$=\frac{I_m}{\pi}[-(-1)+1]$$

$$=\frac{2}{\pi}I_m \quad (\pi\approx 3.1416)$$

$$\approx 0.637I_m$$

例 4 求交流电的平均功率，和电流电压的有效值。功率就是单位时间（例如 1 秒钟）内作的功。

解 在直流电中（电流 i 是常量）电功率就是在一秒钟内电流所做的功，用p表示电功率，即

$$p=i^2R \quad (R\text{ 表示电阻})$$

t 秒中所做的功为：

$$W=pt=i^2Rt$$

在交流电中，电流 $i=I_m\sin\omega t$，于是电功率 $p=i^2R=I_m^2\sin^2(\omega t)R$ 也是随时间 t 改变的函数，所以

$$\overline{P}=\frac{1}{\frac{\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_m^2\sin^2(\omega t)Rdt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}I_m^2R\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t)dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}I_m^2R\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{1}{\omega}\sin^2(\omega t)d(\omega t)$$

$$=\frac{I_m^2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t)d(\omega t)$$

$$=\frac{I_m^2}{\pi}R\left[\frac{\omega t}{2}-\frac{1}{4}\sin(2\omega t)\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{I_m^2R}{\pi}\left\{\left[\frac{\omega\left(\frac{\pi}{\omega}\right)}{2}-\frac{1}{4}\sin\left(2\omega\cdot\frac{\pi}{\omega}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[0-\frac{1}{4}\sin 0\right]\right\}$$

$$=\frac{I_m^2}{\pi}R\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right\}$$

$$=\frac{I_m^2}{\pi}R\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}I_m^2R$$

交流电流 $i=I_m\sin\omega t$ 的有效值是指当交流电流 i 在 电阻 R

上消耗的平均功率与直流电流 I 在 R 上消耗的功率相等时，这个直流电流的数值 I 叫做交流电流 i 的有效值。

即当
$$I^2R=\frac{1}{2}I_m^2R$$

就有：
$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}I_m\approx 0.707I_m$$

也就是交流电流 $i=I_m\sin\omega t$ 的有效值，它等于电流最大值 I_m 的0.707 倍。

同理可以算出交流电压 $u=U_m\sin(\omega t)$ 的有效值：

$$U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707U_m$$

（三）物体重心位置的确定

（1）什么叫重心？它有什么用

物体的重心，是指物体上这样一个点，不论该物体在什么位置，它各部分重量的合力都通过这一点。

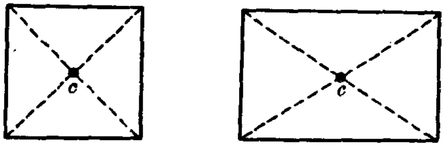
在日常生活与生产实践中，有时需要考虑物体的重心。譬如，用扁担挑水，若前后两桶水一样重的时候，肩要置于扁担的中央，这就是找扁担和两桶水的重心位置。

对工程建筑物进行结构设计也需要知道建筑物重心的位置。如挡土墙的重心位置就关系到它的稳定；梁和柱子的截面重心位置就关系到它的应力分布情况。所以，确定物体重心的位置，在生产实践中是有着重要意义的。

（2）简单规则形状物体的重心

我们在初等几何中，已经知道：

1）正方形和矩形的中心 c（叫做“形心”）在对角线的交点（图15-54）。



(a) (b)

图 15-54

2 ）圆形的形心在圆心（图15-55）。

3 ）球形的形心在球心（图15-56）。

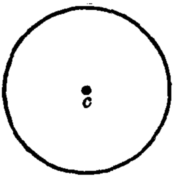


图 15-55

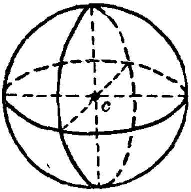


图 15-56

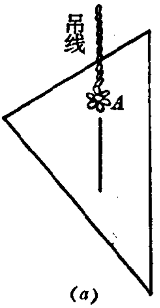
如果我们研究的不是上面这些图形的形心，而是均质的正方形薄板、均质的矩形薄板，均质的圆形薄板，均质的球体，那么，这些有重量的物体的重心在哪里呢？很明显，重心的位置，就在图形的形心 c 处，两者是重合的。

综上所述，不难得出这样一个结论：当物体是均匀物质组成的时候，它的重心与物体形状的形心是重合的。并且，当物体具有对称轴的时候，重心必定在对称轴上。物体具有两根对称轴时，重心必定在对称轴的交点上。

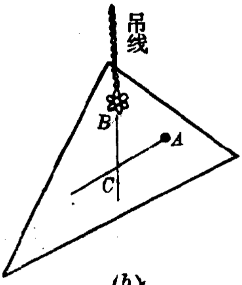
4 ）再来研究一下均质三角形薄板的重心。这是一个没有对称轴的物体。当然，它的重心也与它的形心重合。在平面几何学中我们知道，三角形的重心是在三中线的交点上。

下面我们用悬吊法来讨论它的重心问题。

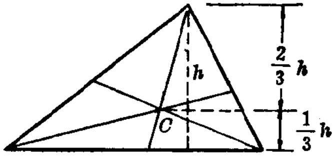
在均质三角形薄板上任一点A处钻一极小的孔，用细线悬吊此板，等它稳定时，过A点在三角板上画一铅垂直线（图15-57a）。再另选任一点B悬吊，过B点可得另一条铅垂线（图15-57b），这两条铅垂线的交点C就是均质三角形薄板的重心。



(a)



(b)



(c)

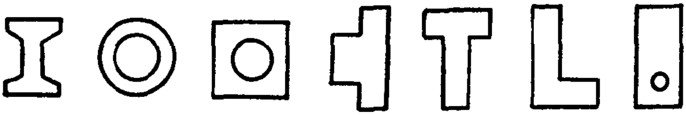
图 15-57

从物体上可以量得：这个C点的位置，恰好是三角形三条中线的交点，过C点作一水平线，必把三角形的高h分为上部的$\frac{2}{3}h$和下部的$\frac{1}{3}h$（图15-57c）。

这里介绍的悬吊法，在实际应用时，为了准确起见，至少须悬吊三次，取三条铅垂线的交点，作为重心。悬吊法不仅可以用于简单规则形状的物体，而且主要是用于不规则形状的物体，因为后者的重心往往是无法严格计算的。

（3）组合形状物体的重心

在水利工程建筑物上，经常遇到各种比较复杂的截面形状的构件，如工字形的、圆环形的、T形的、L形的等等（图15-58），其中（a）、（b）、（c）三种截面，因为



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

图 15-58

它们至少具有两根对称轴，所以它们的重心就在对称轴的交点上，后四种截面（d）、（e）、（f）、（g）的重心就不容易立刻找出来。但对这些截面形状，稍加分析，就会发现：它们都是由最简单的几何形状（如矩形、圆形等）组合而成的，可以叫做“组合图形”。这些组合图形中的每一个简单的组成部分的重心是容易确定的，因此在分别求得这些简单形状的组成部分的重心的基础上，经过一定的计算，便可求出组合图形的重心。

怎样计算出组合图形的重心呢？我们先通过日常生活实践的知识，弄清计算的原理，再结合工程实例，进行详细的计算。人们用扁担挑东西时，大家都有这样的经验：如果担子的两头轻重不同，人们的肩总是离重的一头近一些，而离

轻的一头远一些，才能使扁担平衡，这时扁担和肩接触的那个位置，就是这付担子总重量的重心。图 15-59 是这个经验的示意图。图中扁担长是 l，G_1和 G_2 分别代表担子两头的重量（也可以认为是“重力”），且$G_1<G_2$，肩在 c 点时，担子是平衡的。这 c 点便是担子的重心位置。

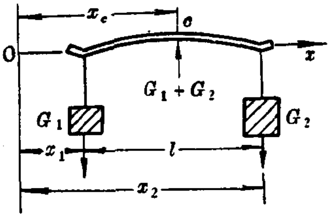


图 15-59

略去扁担本身的重量不计，扁担共受三个力：G_1，G_2 和肩对扁担的反力 G_1+G_2，这三个力使扁担保持水平的平衡状态，因此，这三个力对于任何点（或任何轴）所产生的力矩之和应该等于零，否则担子将产生转动。选取图中所示的坐标系，则应该有：

$$G_1x_1+G_2x_2-(G_1+G_2)x_c=0$$

由此解出重心的横坐标为：

$$x_c=\frac{G_1x_1+G_2x_2}{G_1+G_2}$$

式中，分母是物体的总重量，分子是物体各部分力矩之和。

推而广之，如果有 n 个这样的物体，各重为$G_i(i=1,2,\cdots,n)$，各距任一点的距离为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，则它们的重心就可表示为：

$$x_c=\sum_{i=1}^{n}G_ix_i/\sum_{i=1}^{n}G_i \qquad (6)$$

同理，如果我们遇到的不是一系列的重量G_i，而是一系列没有重量的平面图形（如矩形、圆形），它们的面积分别为$A_i(i=1,2,\cdots,n)$，各面积的形心分别距任一点O的距离为$x_i(i=1,2,\cdots n)$，那么，这些平面图形的总面积的总形

心距点O的距离x_c就可写为：

$$x_c=\sum_{i=1}^{n}A_i x_i\Big/\sum_{i=1}^{n}A_i \qquad (7)$$

下面结合几个工程实例，来进行重心位置的计算。

例 1 在图15-60中表示一个砖柱的截面图形。在结构计算中，为了判断它是中心受压柱，还是偏心受压柱，以便进一步分析计算，要求确定该截面的形心位置。

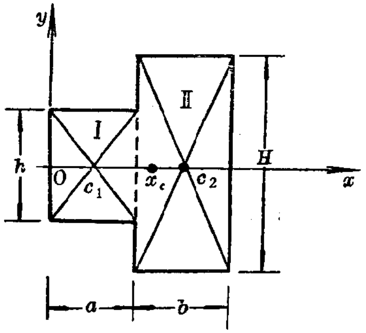


图 15-60

解 ①选取坐标轴，如图15-60所示。把x轴选在截面的对称轴上，此时形心一定位于对称轴上。

②把砖柱截面看成是由Ⅰ、Ⅱ两部分矩形所组成，这两部分的面积分别为：

$$A_1=ah和A_2=bH$$

Ⅰ和Ⅱ的形心，很容易求出，分别在c_1点和c_2点，它们距y轴的距离分别为：

$$x_1=\frac{a}{2}和x_2=a+\frac{b}{2}$$

砖柱截面总面积 $A=A_1+A_2=ah+bH$

③于是，截面的形心位置为

$$x_c=\sum_{i=1}^{2}A_i x_i\Big/\sum_{i=1}^{2}A_i=\frac{A_1x_1+A_2x_2}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{ah\cdot\dfrac{a}{2}+bH\left(a+\dfrac{b}{2}\right)}{ah+bH}=\frac{a^2h+2abH+b^2H}{2(ah+bH)}$$

例 2 图15-61所示为一根L形檩条的截面，试求其形

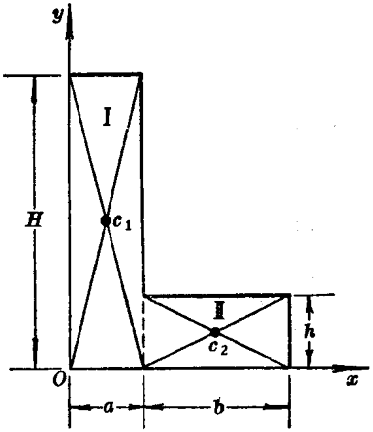


图 15-61

心位置。

解 ①选取坐标轴。由于此截面图形没有对称轴，故选在一个角上，如图15-61所示。

②把截面看成是由Ⅰ、Ⅱ两部分矩形所组成。Ⅰ、Ⅱ的面积分别为：

$$A_1 = aH \text{和} A_2 = bh$$

Ⅰ、Ⅱ的形心很容易确定，它们的位置分别为：

$$\text{点}c_1\text{：}\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} \\ y_1 = \dfrac{H}{2} \end{cases} \qquad \text{点}c_2\text{：}\begin{cases} x_2 = a + \dfrac{b}{2} \\ y_2 = \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

③全部截面形心 c 的位置为（x_c，y_c），而

$$x_c = \sum_{i=1}^{2} A_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{2} A_i = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}$$

$$=\frac{aH\frac{a}{2}+bh\left(a+\frac{b}{2}\right)}{aH+bh}$$

$$=\frac{a^2H+2abh+b^2h}{2(aH+bh)}$$

$$y_c=\sum_{i=1}^{2}A_iy_i/\sum_{i=1}^{2}A_i=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}$$

$$=\frac{aH\cdot\frac{H}{2}+bh\cdot\frac{h}{2}}{aH+bh}=\frac{aH^2+bh^2}{2(aH+bh)}$$

例 3 图15-62表示一T形梁的截面，底部两个圆孔是施工时的预留孔，求此截面的形心位置。

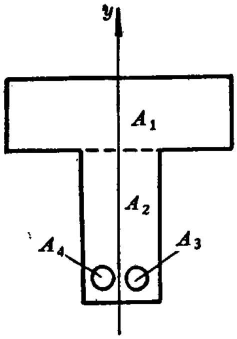


图 15-62

解 ①选取坐标轴，如图 15-62所示。因为此截面有对称轴y，所以就选它为坐标轴，我们要求的形心，必定在这个轴上。

②把全部截面看成是由四部分所组成，面积A_1（上边的矩形），面积A_2（下边的矩形），"负面积"A_3（右边的圆孔），"负面积"A_4（左边的圆孔）。这四部分的面积的形心C_1、C_2、C_3和C_4是极易分别确定的。

③于是，全部截面的形心位置由y_c来决定，而y_c为

$$y_c=\sum_{i=1}^{4}A_iy_i/\sum_{i=1}^{4}A_i=\frac{A_1y_1+A_2y_2-A_3y_3-A_4y_4}{A_1+A_2+A_3+A_4}$$

（4）任意形状连续体的重心

为了研究任意形状物体的重心，让我们先研究一下质点

系的重心问题。

设有三个质点（图15-63）其质量分别为 m_1，m_2，m_3

图 15-63

则 m_1对 c 的力矩 $= m_1 g(x_c - x_1)$

m_2对 c 的力矩 $= m_2 g(x_c - x_2)$

m_3对 c 的力矩 $= m_3 g(x_3 - x_c)$

此处 g 为重力加速度。在平衡状态应有：

$$m_1 g(x_c - x_1) + m_2 g(x_c - x_2) = m_3 g(x_3 - x_c)$$

或 $$m_1 g(x_c - x_1) + m_2 g(x_c - x_2) + m_3 g(x_c - x_3) = 0$$

因得：

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

推而广之，设有 n 个质点，我们即有：

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \quad (8)$$

此处 $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 为质点系的总质量，$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ 为此质点系对 x 轴的**静力矩**。

同理，对 y 轴、z 轴，我们有：

$$y_c = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \quad (9)$$

$$z_c = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \quad (10)$$

对于连续体，可以首先把物体分成小块，然后设此小块的质量均集中于此小块重心处（即一点处），这样就可以将

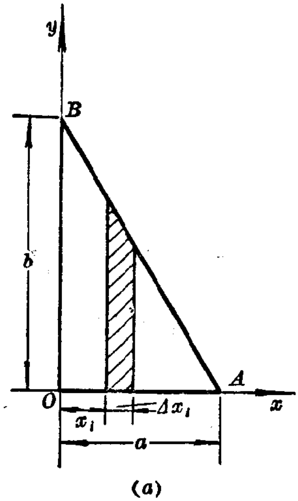
连续体作为一个质点系。当把这些小块无限的分下去，于是就把这个问题化为定积分问题。

1 ）薄片的重心问题

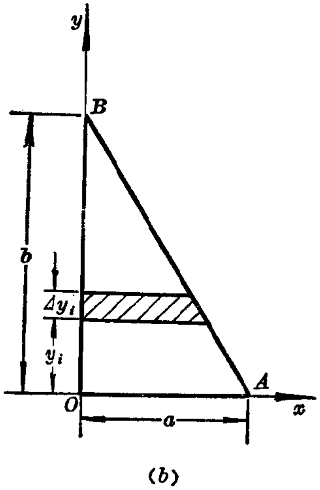
我们先通过具体实例，以找出普遍的规律：

例 1 一均质直角三角形薄板，其两个直角边分别为 $OA=a$和$OB=b$。求此直角三角形薄板重心。

解 ①选定坐标轴。因为这个三角形没有对称轴，所以选用两直角边的交点O作为坐标原点，两直角边分别为x轴和y轴(图15-64)三角形重心点的位置，就将由坐标(x_c，y_c)来确定。



(a)



(b)

图 15-64

②将三角形薄板分成很多的小长条，每一小条如图 15-64 a 所示。把这个小条近似的看成是小矩形，它的面积就是

$y_i \Delta x_i$，设薄板每单位面积的质量为μ（常量），则这个小条的质量就是$\mu y_i \Delta x_i$，小条的质量可以看作是集中在这小矩形的形心处。于是，这一小条对y轴的静力矩等于

$$\Delta M_y = \text{小条质量} \times x_i'$$
$$= x_i' \mu y_i \Delta x_i$$

所以静力矩的微分$dM_y = \mu xydx$。

为了把上式中的y变为x的函数，我们需要找一找y与x的关系，由三角形ΔAOB可知：

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{a-x} \quad \text{所以} \quad y = \frac{b}{a}(a-x)$$

代入上式得：

$$dM_y = \mu x \frac{b}{a}(a-x)dx$$
$$= \frac{b}{a}\mu x(a-x)dx$$

于是整个三角形薄板全部小条对y轴的静力矩就等于：

$$M_y = \int dM_y = \int_0^a \mu \frac{b}{a} x(a-x)dx$$
$$= \int_0^a \mu bxdx - \int_0^a \mu \frac{b}{a} x^2 dx$$
$$= \mu b \frac{x^2}{2}\Big|_0^a - \mu \frac{b}{a} \frac{x^3}{3}\Big|_0^a$$
$$= \mu b \frac{a^2}{2} - \mu \frac{b}{a} \cdot \frac{a^3}{3}$$
$$= \mu \frac{a^2 b}{2} - \mu \frac{a^2 b}{3}$$
$$= \mu \frac{a^2 b}{6}$$

而 $$x_c=\frac{M_y}{\text{三角形板总质量}}=\frac{\mu\cdot\frac{a^2b}{6}}{\mu\times\text{三角形板面积}}$$

$$=\frac{\frac{a^2b}{6}}{\frac{1}{2}ab}=\frac{a}{3}$$

③将三角形薄板分成许多小横条如图15-64（b）所示。同样的道理，可以近似地把每一小条看成是小矩形，于是这一小横条对 x 轴的静力矩为

$$\Delta M_x=y_i'\times\text{小矩形条质量}$$
$$=y_i'\mu\times\text{小矩形面积}$$
$$=y_i'\mu x_i\Delta y_i$$
$$=\mu x_i y_i'\Delta y_i$$

$$\therefore \qquad dM_x=\mu xydy$$

仍由前述的 x 与 y 的关系式可得：

$$x=\frac{a}{b}(b-y)$$

代入上式，得：

$$dM_x=\mu\frac{a}{b}(b-y)ydy$$

积分乃得三角形薄板对 x 轴的静力矩

$$M_x=\int dM_x=\int_0^b\mu\frac{a}{b}(b-y)ydy$$

$$=\int_0^b\mu aydy-\int_0^b\mu\frac{a}{b}y^2dy$$

$$=\mu a\ \frac{y^2}{2}\Big|_0^b-\mu\frac{a}{b}\ \frac{y^3}{3}\Big|_0^b$$

$$=\mu a\ \frac{b^2}{2}-\mu\frac{a}{b}\frac{b^3}{3}=\mu\frac{ab^2}{6}$$

于是：

$$y_c=\frac{M_x}{\text{三角形薄板总质量}}=\frac{\mu\frac{ab^2}{6}}{\mu\times\text{三角形面积}}$$

$$=\frac{\mu\frac{ab^2}{6}}{\mu\cdot\frac{ab}{2}}=\frac{b}{3}$$

由于三角形为均质，所以三角形薄板的重心位置 $\left(x_c=\frac{a}{3},\ y_c=\frac{b}{3}\right)$，与其形心相一致。

例 2 一根半径为R的圆木，削去一部分（见图15-65a），削完后，上顶宽度恰等于R。试求此截面的形心。

解 ①选取坐标轴。由于削完后的截面形状具有对称轴，而重心必定位于这个对称轴上，所以，我们就选这根对称轴作为坐标轴y，以通过圆心O的水平轴为x轴，原点就选在圆心，由解析几何学的知识可知：圆的方程为：

$$x^2+y^2=R^2$$

②形心的位置，因为它在对称轴y上，$\therefore\ x_c=0$，只要求出一个y_c来就确定了。可仍按微积分的基本分析方法，即无限细分，以直线代曲线，再无限积累。

我们把截面分成许多小横条，每一小横条可以看成是小长方条，任取其中一个小横条（如图15-65a中的阴影部分）为代表。由于小条很细，它的形心可以看成是在点$(0,y_i)$。

小条面积$=2x_i\Delta y_i$，由$x_i^2+y_i^2=R^2$得$x_i=\sqrt{R^2-y_i^2}$

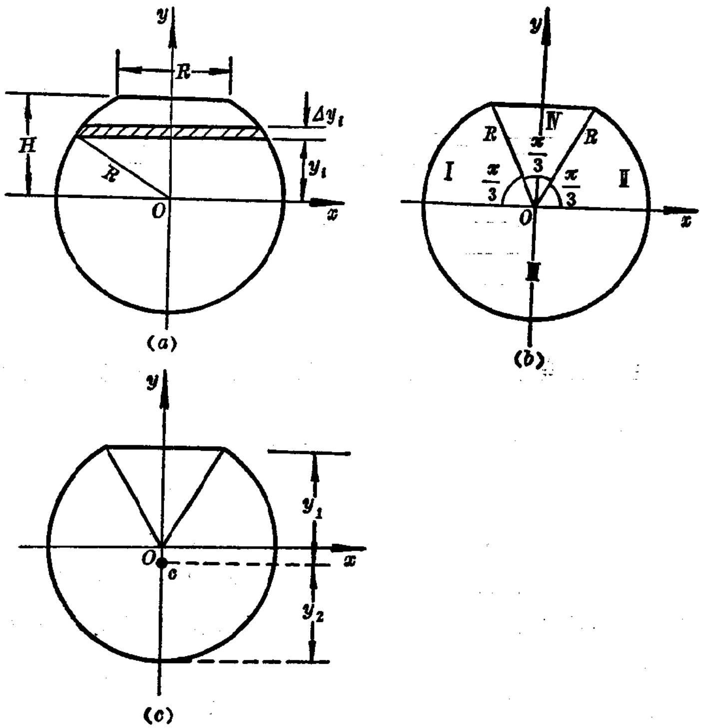


图 15-65

∴　小条面积 $= 2\sqrt{R^2-y_i^2}\,\Delta y_i$

$\Delta A_x = y_i \times$ 小条面积称为小条面积对 x 轴的面积矩

$\Delta A_x = y_i \cdot 2\sqrt{R^2-y_i^2}\,\Delta y_i = 2y_i\sqrt{R^2-y_i^2}\,\Delta y_i$

截面内全部小条的面积矩为：

$$A_x = \int dA_x = \int_{-R}^{H} 2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

积分上限H，其关系式可由勾股定理得出如下：

$$H=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$$

于是：

$$A_x=\int dA_x=\int_{-R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} 2y\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

$$=-\frac{2}{3}(R^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}=-\frac{R^3}{12}$$

所以

$$y_c=\frac{A_x}{\text{截面总面积}}=\frac{-\frac{R^3}{12}}{\text{截面总面积}}$$

总面积可以认为是由四个部分所组成（图15-65 b）：

Ⅰ：$\text{扇形面积}=\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}R^2$

Ⅱ：$\text{扇形面积}=\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}R^2$

Ⅲ：$\text{半圆面积}=\frac{1}{2}\pi R^2$

Ⅳ：$\text{三角形面积}=\frac{1}{2}R\frac{\sqrt{3}}{2}R=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$

$$\text{总面积}=\text{Ⅰ}+\text{Ⅱ}+\text{Ⅲ}+\text{Ⅳ}=\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{12}R^2$$

$$\therefore\quad y_c=\frac{-\frac{R^3}{12}}{\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{12}R^2}=-0.027R$$

式中负号表示着：截面形心 c 的位置，在圆心下方相距为：$0.027R$（见图15-65c）。

这样，c 点距截面顶部和底部的距离分别为：

$$y_1=H+0.027R=\frac{\sqrt{3}}{2}R+0.027R=0.893R$$

$$y_2=R-0.027R=0.973R$$

总结以上，如果我们顺着 y 轴的方向分成小竖条，则重心的公式计算如下：

$$x_c=\frac{\lim\Sigma\Delta A_i\mu_i\bar{x}_i}{\lim\Sigma\Delta A_i\mu_i}$$

$$=\frac{\lim\Sigma y_i\Delta x_i\mu_i x_i'}{\lim\Sigma y_i\Delta x_i\mu_i}=\frac{\int_a^b\mu xydx}{M}\text{（非均匀）}\qquad(11)$$

$$=\frac{\int dM_y}{M}=\frac{\int_a^b xydx}{A}\text{（均匀）}\qquad(11')$$

此处，$\bar{x}_i$代表小竖条的形心坐标，因小竖条很细，小竖条所在的横坐标相差无几，因将$\bar{x}_i$代以x_i'

同理，

$$y_c=\frac{\lim\Sigma\Delta A_i\mu_i\bar{y}_i}{\lim\Sigma\Delta A_i\mu_i}=\frac{\lim\Sigma y_i\Delta x_i\mu_i\frac{y_i'}{2}}{\lim\Sigma\mu_i y_i\Delta x_i}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\int ydM_x}{M}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b\mu y^2dx}{M}\text{（非均匀）}\qquad(12)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{A}\text{（均匀）}\qquad(12')$$

例 3 求半圆面的形心（图15-66）。

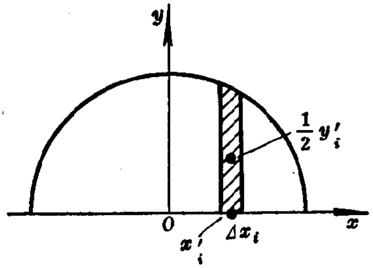


图 15-66

解 $x_c=0$

$$y_c=\frac{\lim\Sigma\Delta A_i\bar{y}_i}{\lim\Sigma\Delta A_i}=\frac{\lim\Sigma y_i\Delta x_i\frac{y_i'}{2}}{\lim\Sigma y_i\Delta x_i}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}y^2dx}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx}{\pi a^2}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}a^3}{\pi a^2}=\frac{4a}{3\pi}$$

例 4 求抛物线 $y^2=4x$ 由顶点到$x=1$这一段截头的形心（图15-67）。

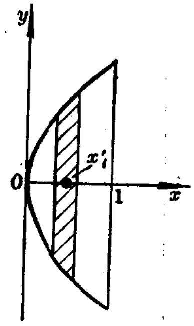


图 15-67

解 $y_c=0$

$$Ax_c=4\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{8}{5}$$

而 $$A=4\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8}{3}$$

∴ $$x_c=\frac{3}{5}$$

2）旋转体的重心

因$Mx_c=\Sigma\Delta M_i\bar{x}_i$，当均匀质量时，$\mu$ 为常量

$$\mu Vx_c=\mu\Sigma\Delta v_i\bar{x}_i$$

$$Vx_c=\Sigma\Delta v_i\bar{x}_i$$

当体积为旋转体时，$\Delta v_i=\pi y_i^2\Delta x_i=\pi[f(x_i)]^2\Delta x_i$

$$Vx_c\approx\pi\Sigma[f(x_i)]^2\bar{x}_i\Delta x_i$$

取极限后有：

$$\left.\begin{aligned}x_c&=\frac{\pi\int_a^b xy^2dx}{\pi\int_a^b y^2dx}=\frac{\int_a^b xy^2dx}{\int_a^b y^2dx}\\ y_c&=0\\ z_c&=0\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

例 求质量均匀的半球重心（形心）（图 15-68）。

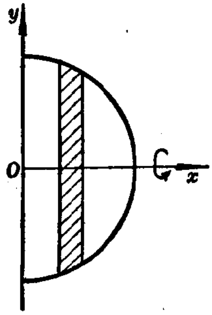


图 15-68

解 $$Vx_c=\pi\int_0^a xy^2dx$$

$$=\pi\int_0^a x(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{a^4}{4}\pi$$

但$V=\frac{2}{3}\pi a^3$，∴ $x_c=\frac{3}{8}a$

3）旋转面的重心

$$\Delta S_i = 2\pi y_i \Delta s_i$$

$$Mx_c \approx \Sigma x_i \Delta M_i$$

即 $$\mu S X_c \approx \Sigma x_i \Delta S_i \mu_i$$

若为均匀物质，则有$Sx_c \approx \Sigma x_i 2\pi y_i \Delta s_i$

$$\therefore \quad x_c = \frac{2\pi\int_a^b xy\sqrt{1+y'^2}dx}{S} \qquad (14)$$

例 5　设直线$2y = x+2$绕 x 轴旋转，求$x=0$到$x=2$这一段旋转面的形心（图15-69）。

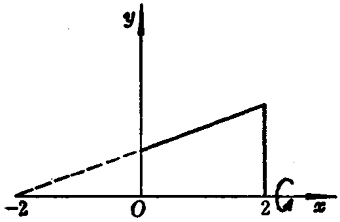


图 15-69

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}dx$$

$$Sx_c = 2\pi\int_0^2 x\left(\frac{x+2}{2}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{2}dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{5}}{2}\int_0^2 (x^2+2x)dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{5}}{2}\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2$$

$$= \frac{10\sqrt{5}}{3}\pi$$

$$S = 2\pi \int_0^2 \frac{x+2}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{5}}{2}\left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = 3\sqrt{5}\pi$$

$$x_c = \frac{10}{9},\quad y_c = 0,\quad z_c = 0$$

4）物质曲线（有质量的曲线）的重心

$$lx_c \approx \Sigma \bar{x}_i \Delta s_i$$

$$lx_c = \int_0^l x ds,\quad ly_c = \int_0^l y ds$$

例 6　求四歧点内摆线在第一象限内一段的重心。

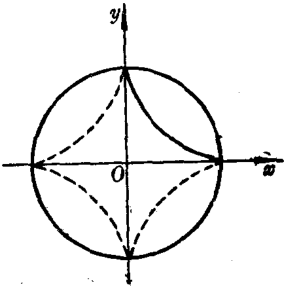


图 15-70

解　$x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

$$dx = -3a\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$

$$dy = 3a\sin^2\theta\cos\theta d\theta$$

$$ds^2 = 9a^2(\cos\theta\sin\theta)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta^2$$

$$= (3a\cos\theta\sin\theta)^2 d\theta^2$$

$$\int_0^l x ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3\theta\, 3a\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$= -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\cos\theta = -\frac{3a^2}{5}\cos^5\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}$$

$$l = \int_0^l ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{2}a\sin^2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a$$

所以

$$x_c = y_c = \frac{3a^2}{5} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{2a}{5}$$

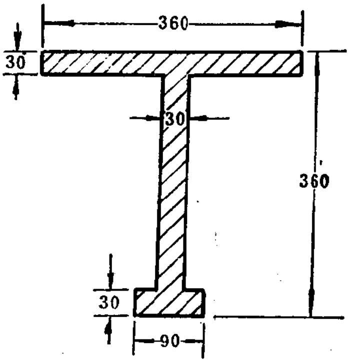
习　题　15-5

1.圆柱高 h，底半径为 r，底之密度为 d，在高 z 处的密度为 $d+kz$，试证其质量为：

$$M = \pi r^2 h\left(d + \frac{kh}{2}\right) = \pi r^2 hD$$

此处 D 为平均密度。

以下（2-26题）各重心问题均考虑为均匀密度，所以求重心问题就是求几何形心问题。



第 2 题　图

2.求工字形截面的形心位置。

提示：选底边与 x 轴重合；对称轴与正 y 轴重合。

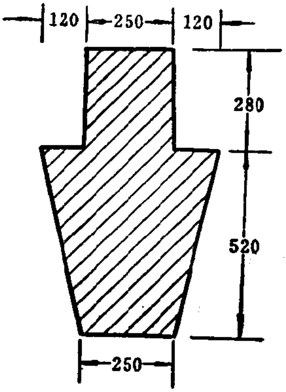
答：距底边239.4处。

3.求花篮梁截面的形心位置。

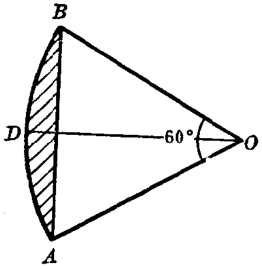
提示：选坐标系仿前题。

答：距底边387.32处。

4.一弓形ADB，半径$OA=30$毫米，张角$\angle AOB=60^\circ$，求它的形心。



第3题　图

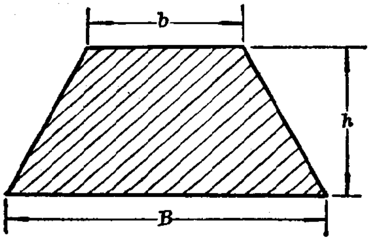


第4题　图

提示：取O点为原点，对称轴与正x轴重合。

答：距原点$\dfrac{30}{2\pi-3\sqrt{3}}$处。

5.一等腰梯形，上底为b，下底为B，高为h，试求其



第5题　图

形心。

提示：将梯形上底 b 与 y 轴重合；将其对称轴与正 x 轴重合。于是其一腰的方程为：

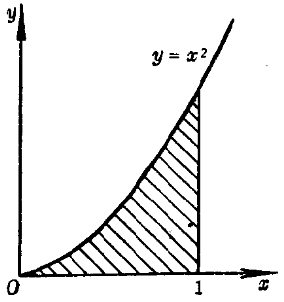
$$y = \frac{B-b}{2h}x + \frac{b}{2}$$

答：距 y 轴 $\frac{(2B+b)h}{3(B+h)}$ 处。

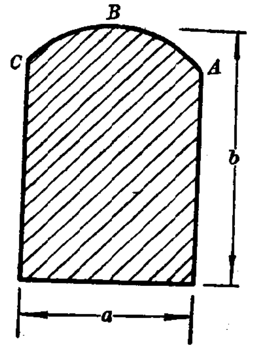
6. 求由曲线 $y=x^2$，x 轴和直线 $x=1$ 所围的图形的形心。

答：$x_c = \frac{3}{4}$。

7. 某工件，形状和尺寸如图所示，其中曲线 ABC 是顶点为 B 的抛物线，试求其形心位置。



第6题 图



第7题 图

提示：将顶点 B 置于原点，取其对称轴与正 x 轴重合，并设此抛物线的方程为 $y^2 = x$。

答：$x_c = \frac{3(80b^2 - a^4)}{40(12b - a^2)}$。

8. 正圆锥体，其高为 h，底半径为 r，其轴在正 x 轴上，

求其重心。

提示：将顶点放置在坐标原点。

答：$x_c=\frac{3}{4}h$。

9. 设一球体为由$x^2+y^2=a^2$所围面积绕x轴旋转所成，今取由$x=a-h$到$x=a$那一块的重心。

答：$x_c=\frac{3}{4}\ \frac{(2a-h)^2}{3a-h}$。

10. 一物体为由椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$所围面积绕x轴旋转而成，试求其当$x>0$那一部分的重心。

答：$x_c=\frac{3}{8}a$。

11. 一物体为由抛物线$x^2=4y$，x轴，$x=0$，$x=4$所围的面积绕x轴所成，试求其重心。

答：$x_c=\frac{10}{3}$。

12. 前题的面积绕y轴旋转所成体积的重心。

答：$y_c=\frac{4}{3}$。

13. 一物体为由曲线$y=\sin x$，x轴，$x=0$到$x=\frac{\pi}{2}$所围的面积绕x轴所成之体积的重心。

答：$x_c=\frac{\pi^2+4}{4\pi}$。

14. 一物体为由曲线$y=e^{-x}$，x轴，$x=0$，$x=1$所围的面积绕x轴所成的体积之重心。

答：$x_c=\frac{e^2-3}{2(e^2-1)}$。

15. 前题面积绕y轴旋转所成的体积的重心。

答：$y_c=\dfrac{e^2-3}{8e(e-2)}$。

16*．一物体为摆线$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$一拱（即$\theta=0$到$\theta=2\pi$）所围面积绕y轴所成的体积的重心。

答：$y_c=\dfrac{5}{6}a$。

17*．一物体为圆$(x-b)^2+y^2=a^2$，$a<b$，在第一象限中的半圆面积绕y轴所成的体积的重心。

答：$y_c=\dfrac{4a}{3\pi}$。

18．求由$y=x$，$x=1$，$y=0$所围成的三角形的重心。

答：$x_c=\dfrac{2}{3}$，$y_c=\dfrac{1}{3}$。

19．求介于抛物线$3y^2=-4(x-3)$与y轴之间面积的重心。

答：$x_c=\dfrac{6}{5}$，$y_c=0$。

20．求右半圆面积的重心，设此圆的方程为$x^2+y^2=a^2$。

答：$x_c=\dfrac{4a}{8\pi}$。

21．求在第一象限内的椭圆$16x^2+9y^2=144$的部分面积的重心。

答：$x_c=\dfrac{4}{\pi}$，$y_c=\dfrac{16}{3\pi}$。

22．求圆$x^2+y^2=25$被$x+y=5$割下的小部分那块的重心。

答：$x_c=y_c=\dfrac{10}{3\pi-6}$。

23.求$y=\sin x$，由$x=0$，$x=\pi$及x轴所围面积的重心。

答：$y_c=\frac{\pi}{8}$。

24.在第一象限内由曲线$x^2+y^2=2$，$y^2=x$，x轴所围成的面积的重心。

答：$x_c=\frac{44}{5(3\pi+2)}$，$y_c=\frac{8\sqrt{2}-7}{3\pi+2}$。

25.在第一象限内由曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$所围成的面积的重心。

答：$x_c=\frac{256a}{315\pi}$。

26.求由圆$x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=4x$及x轴所围成的面积的重心。

答：$\left(1, \frac{5}{4\pi-3\sqrt{3}}\right)$。

27.求半圆弧的重心。

提示：$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$。

答：$x_c=\frac{2a}{\pi}$。

28.求半圆面积的重心。

答：$x_c=\frac{1}{2}a$。

29.一半椭圆$3x^2+4y^2=12$，$x\geqslant 0$，绕x轴旋转，求其旋转面的重心。

答：$x_c=\frac{4(8-3\sqrt{3})}{2\pi+3\sqrt{3}}$，$S=\frac{\pi}{3}(9+2\pi\sqrt{3})$。

30.求物质曲线$\rho=a(1+\cos\theta)$的重心。

答：$x_c=\frac{4}{5}a$，$y_c=0$。

31.求摆线一拱的物质曲线的重心。

答：$y_c=\frac{4}{3}a$。

32.求由抛物线$y^2=4px$上被通径所割弧段的重心。

答：$x_c=\frac{p}{4}\left[\frac{6\sqrt{2}+\ln(3-2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2})}\right]$，$y_c=0$。

33.求前题弧段绕x轴所成的旋转面的重心。

答：$x_c=\frac{2p}{35}(5+3\sqrt{2})$，$y_c=0$。

34.求悬链线$y=e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$由$x=0$到$x=2$弧段的重心。

答：$\left(\frac{4}{e+1},\ \frac{e^4+4e^2-1}{2e(e^2-1)}\right)$。

（四）液体压力

在物理上我们知道：放在液体的水平面下的静止物体，其所受的压力等于物体上面液体柱的重量。

例如8立方米水池底所受的总压力为：$F=Wh$

$8\times1000=8000$公斤（1立方米水重1000公斤）

又根据巴斯噶原理，物体在液体中所受的压力在各方向是一样的。

液体在单位面积上所施加于物体上的压力称为压强，其大小等于

$$P=\gamma h\text{（吨/平方米）},\quad P\text{称压强。}$$

此处h为液体柱之高，γ为单位体积液体之重量（或称比重）。

现在我们来研究铅直沉没于液体面下的物体所受的液体

压力。为了方便起见，我们把右手系的平面坐标顺时针转90°，如图15-71所示，现在考虑一个没于液面下的垂直薄片，先把薄片分成小条，则在第 i 个小条上所受的压力大小

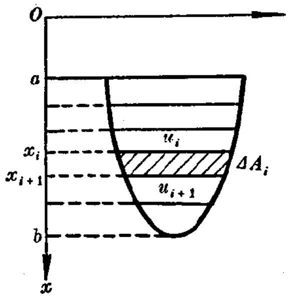


图 15-71

为：压力＝压强×板的面积

$$\Delta F_i = \gamma x_i \Delta A_i$$

$$\approx \gamma x_i u_i \Delta x_i$$

所以，$F \approx \Sigma \gamma x_i \Delta A_i = \Sigma \gamma x_i u_i \Delta x_i$

（u_i表示窄条ΔA_i的长度）

取极限得：

$$F = \gamma \int_a^b x u(x) dx$$

例 1 为了设计闸门，需要知道闸门承受了多大的水压力。设闸门为矩形，闸门挡水宽度为 2 米，高度为 3 米（图 15-72a），求水面与闸门顶齐时，闸门所受的水压力F。

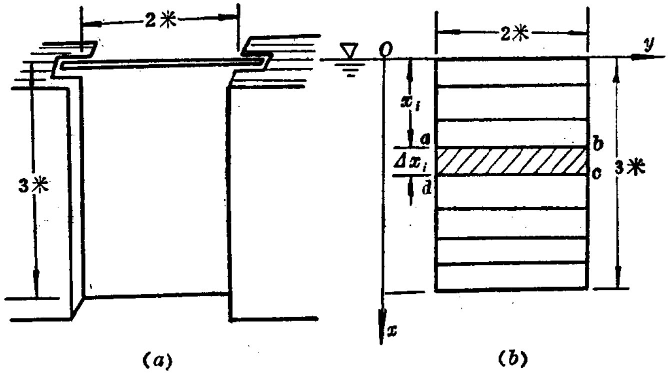


图 15-72

解　$F \approx \Sigma \gamma x_i \Delta A_i = \Sigma \gamma x_i 2 \Delta x_i$

$$F = 2\gamma \int_0^3 x dx = \gamma x^2 \Big|_0^3 = 9 \text{ 吨} \quad (\text{ 1 立方米水重 1 吨 })$$

例 2　某水库溢洪道为圆形闸门，其直径为 6 英尺，今水库之水恰到闸门之半，问此闸门所受压力如何（图15-73）？

解　$x^2 + y^2 = 9$

$$\frac{1}{2}F = \gamma \int_0^3 x\sqrt{9 - x^2}\, dx$$

因为英制中 1 立方英尺水重为62磅

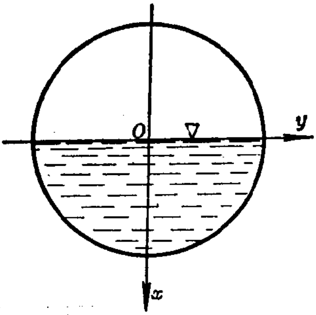


图 15-73

$$\therefore \quad \frac{1}{2}F = 62\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, x dx$$

$$= \left[-\frac{62}{3} (9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3$$

$$= 558 \text{磅}$$

$$F = 1116 \text{磅}$$

例 3　一等腰梯形槽。其截面为 2 米深，下底宽 2 米，上底宽 3 米，问盛满水后此槽一端所受之压力如何（图 15-74)？

解　适当选择坐标，就不难找出此槽右腰的方程式，今先设此方程式为：

$$y = mx + \frac{3}{2}$$

因此直线在 y 轴上截距 $b = \frac{3}{2}$，又因此直线过（ 2， 1 ）代

入此直线的方程中，即可确定m。

$$1=2m+\frac{3}{2} \qquad \therefore m=-\frac{1}{4}$$

所以
$$2y=-\frac{1}{2}x+3$$

因此
$$F=\gamma\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)dx$$

$$=\gamma\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{14\gamma}{3}=\frac{14}{3}\times 1000\text{公斤}$$

$$=4666.6\text{公斤}$$

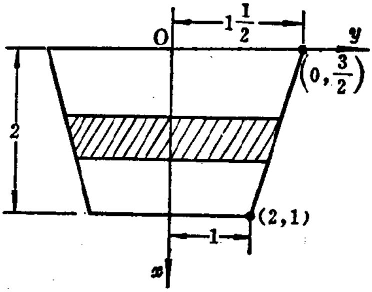


图 15-74

例 4 今有一三角形薄片，它的底$AC=b$，高$BD=h$，铅直的没入水中，假设三角形的顶点B在水面上，其底AC平行于水面，试求水对此薄片的压力。

解 $\dfrac{MN}{AC}=\dfrac{BE}{BD}$ （图15-75）

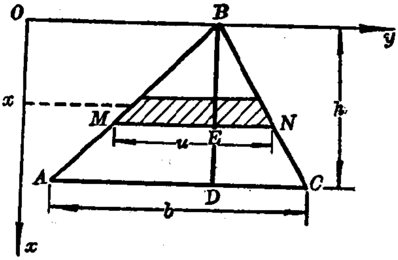


图 15-75

即 $$\frac{u}{b}=\frac{x}{h}$$

所以 $$u=\frac{bx}{h}$$

$$F=\gamma\int_0^h x\frac{bx}{h}dx$$

$$=\frac{\gamma b}{h}\int_0^h x^2dx$$

$$=\frac{\gamma b}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{\gamma b}{h}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{\gamma bh^2}{3}$$

因一立方米水重为1000公斤（或一吨），所以如果 b、h 均为米，则

$$F=\frac{bh^2}{3}\text{吨}\quad(\gamma=1\text{吨})$$

习　题　15-6

1. 一正方形薄板垂直地沉没于水中，正方形的一个顶点位于水面，而一对角线平行于水面，正方形的边为 a 米，问水在正方形薄板每侧的压力为何？

提示：正方形的各边方程为$y=\pm x$，$y=\pm(\sqrt{2}a-x)$。

答：$\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$吨。

2.试计算水压在一上底（位于水面）为$a=6.4$米，下底为$b=4.2$米，高为$H=3$米，直角梯形上的压力。

提示：把直角边置于x轴上。

答：22.2吨。

3.一个椭圆形薄板的一半沉没于液体中（垂直的），它的一个轴位于液面（轴长$=2b$），如果椭圆沉没的半长轴等于a，液体比重为d，问在该薄片板每侧的压力为何？

答：$\dfrac{2}{3}da^2b$。

（五）转动惯量

研究这个问题也和研究重心问题类似，可以先研究质点系的转动惯量。

由物理学我们知道，若质点的质量为m，此质点距所绕的旋转轴的距离为r，则其转动惯量为mr^2。又因转动惯量有可加性，故整个质点系的转动惯量

$$I=\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2$$

由此可以看出，当质点距离其所绕转动轴越远，其转动惯量也就越大（图15-76）。

对于一个连续体，我们可以考虑把它分成小块，然后认为每小块的质量均集中到一点，于是便将连续体化为质点系的问题，当这个分法无限的分下去，再取极限，即化为定积分问题（图15-77）。

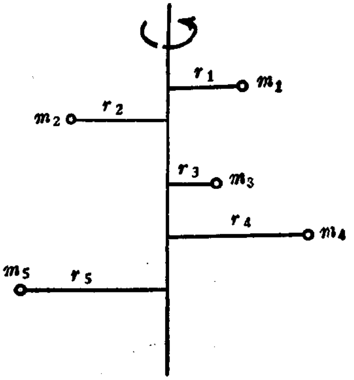


图 15-76

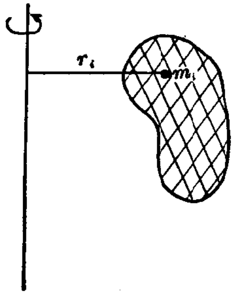


图 15-77

例 1 求均匀质量之木棍绕其一端旋转，求其转动惯量（图 15-78）。

解 设此木棍的密度为 μ，则

$$\Delta I_i = m_i x_i^2 \approx \mu \Delta x_i x_i^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta I_i \approx \mu \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i$$

取极限后有：

$$I = \mu \int_0^l x^2 dx = \mu \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2$$

$$M = \mu l$$

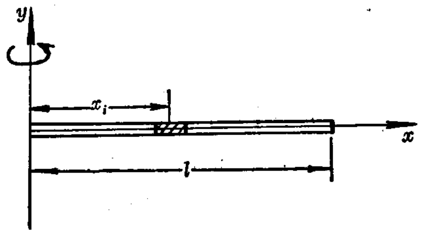


图 15-78

例 2 求均匀质量的木棍绕其中心旋转的转动惯量（图15-79）。

解 取木棍右边一半计算，然后二倍之，这样便可利用上例结果，从而有：

$$I=2\mu\int_0^a x^2dx=\frac{2a^3\mu}{3}=\frac{1}{3}Ma^2$$

$$M=2a\mu$$

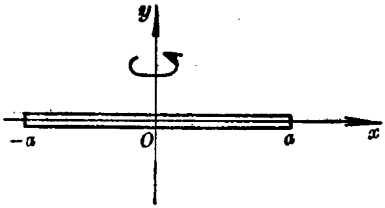


图 15-79

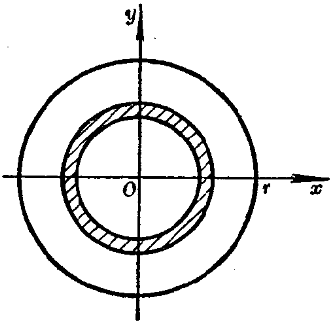


图 15-80

例 3 求圆片绕其中心的转动惯量（图15-80）。

解 取其每一圆环作为单元

$$\Delta m_i=[\pi(x_i+\Delta x_i)^2-\pi x_i^2]\mu$$

$$=2\pi\mu\left(x_i+\frac{\Delta x_i}{2}\right)\Delta x_i$$

$$=2\pi\mu x_i'\Delta x_i$$

此处 $$x_i'=x_i+\frac{\Delta x_i}{2}$$

∴ $$\Delta I_i=2\pi\mu x_i^2\cdot x_i'\Delta x_i$$

当圆环宽度很窄时，可考虑x_i与x_i'差别不大，因此有：

$$\Delta I_i=2\pi\mu x_i^3\Delta x_i$$

$$\therefore \quad I = 2\pi\mu\int_0^r x^3 dx = \frac{1}{2}\pi\mu r^4 = \frac{1}{2}Mr^2,$$

$$M = \pi r^2 \mu$$

例 4 圆片绕其一直径旋转，求其转动惯量（图 15-81）。

解 先把圆片平行 y 轴分成窄条（图15-81），每条考虑成一个棍而绕其中心旋转，利用例2 的结果。

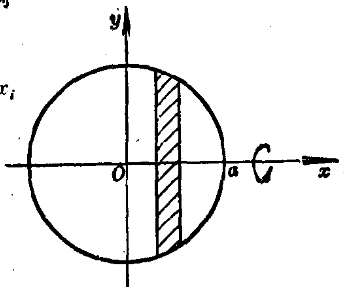


图 15-81

$$\Delta I_i = \frac{1}{3}\Delta M_i y_i^2 = \frac{1}{3}2y_i \mu y_i^2 \Delta x_i$$

$$= \frac{2}{3}\mu y_i^3 \Delta x_i$$

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3}\mu y_i^3 \Delta x_i$$

取极限后，$\frac{1}{2}I = \frac{2}{3}\mu\int_0^a y^3 dx$

$$I = \frac{4}{3}\mu\int_0^a \sqrt{(a^2 - x^2)^3}\, dx$$

$$= \frac{4}{3}\mu\left[\frac{1}{4}(x\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}a^4 \arcsin\frac{x}{a})\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{4}Ma^2$$

$$M = \pi a^2 \mu$$

例 5 圆球绕其一直径旋转，求其转动惯量。

解 把球切成圆片（图15-82），然后利用例3 的结果。

$$\Delta I_i = \frac{1}{2}z_i^2 m_i$$

$$= \frac{1}{2}\mu\,\pi z_i^2\, z_i^2 \Delta y_i$$

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\mu\pi z_i^4 \Delta y_i$$

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\mu\pi\int_0^r z^4 dy$$

$$= \frac{1}{2}\mu\pi\int_0^r (r^2 - y^2)^2 dy$$

$$= \frac{8}{15}\mu\pi r^5 = \frac{2}{5}Mr^2$$

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3\mu$$

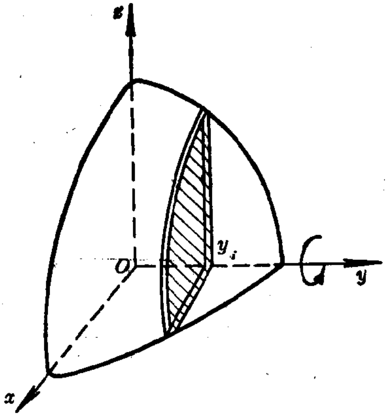


图 15-82

习 题 15-7

1.边长为$2a$与$2b$且密度均匀的长方形，绕过中心且平行于$2a$边的轴旋转，求其转动惯量。

答：$\frac{1}{3}Mb^2$，$M = 4ab\mu$。

2.求等腰三角形对其底边的转动惯量。

答：$\frac{1}{6}Mh^2$，M为质量，h为其高。

3.求底半径为 r，高为 h 且密度均匀的圆柱绕其轴旋转的转动惯量。

答：$\frac{1}{2}Mr^2$，$M=\pi r^2 h\mu$。

4*.求环体绕其对称轴的转动惯量。

提示：$(x-b)^2+y^2=a^2$

$$\frac{1}{2}I = 2\pi\int_{b-a}^{b+a} x^3\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx$$

答：$I = 2\pi^2 a^2 b\left(\frac{3}{4}a^2+b^2\right)$。

5*.求环体表面绕其对称轴的转动惯量。

提示：$x=b+a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

$$I = 2\pi\int_0^{2\pi}(b+a\cos\theta)^3\sqrt{a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\,d\theta$$

$$=2\pi a\int_0^{2\pi}(b+a\cos\theta)^3 d\theta$$

答：$I=4\pi^2 ab\left(b^2+\frac{3}{2}a^2\right)$。

（六）吸引力

利用牛顿万有引力公式：

$$F=K\frac{Mm}{r^2}$$

可以研究两物体间的吸引力问题，公式中 K 为引力常数，M，m 分别为两物体的质量，r 为两物体间的距离。从公式中可以看出吸引力与两物体的质量成正比，与它们之间的距离平方成反比。而引力常数 K 就是这个比例常数。

例 1 求半圆环对其中心放一质量为 m 的质点的吸引力（图15-83）。

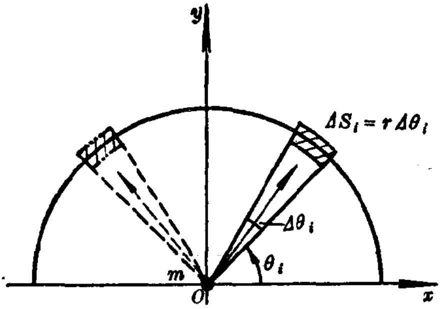


图 15-83

解 设此圆环密度为μ（常数），又因此半圆环对 y 轴对称，故其在x轴上的分力左右抵销，所以$F_x=0$，今只计算 F_y，因$\Delta M_i=\mu r\Delta\theta_i$

$$\Delta F_y = K\frac{\Delta M_i m}{r^2}\sin\left(\theta_i+\frac{\Delta\theta_i}{2}\right)$$

$$F_y \approx \sum_{i=1}^{n} K\frac{\Delta M_i m}{r^2}\sin\left(\theta_i+\frac{\Delta\theta_i}{2}\right)$$

$$= K\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu r m}{r^2}\sin\left(\theta_i+\frac{\Delta\theta_i}{2}\right)\Delta\theta_i$$

取极限后得：

$$F_y = \frac{Km\mu}{r}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2Km\mu}{r} = \frac{2KmM}{\pi r^2},$$

$$M = \pi r\mu$$

例 2 圆心角为2α所对的圆弧，其均匀线密度为 μ，设圆半径为r，在圆心上高h处有一质点P，其质量为M，求P点与圆弧的引力（图15-84）。

解 由于对称$F_y=0$

$$\Delta F_x = K\frac{M\mu r\Delta\theta_i}{r^2+h^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\cos\theta_i$$

所以

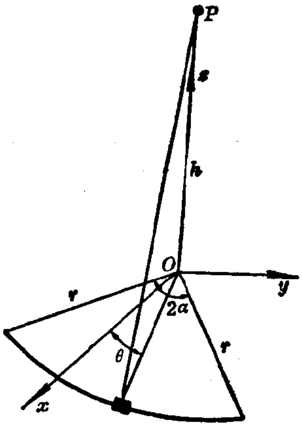


图 15-84

$$F_x = 2K\frac{Mr^2\mu}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\alpha}\cos\theta d\theta = 2K\frac{Mr^2\mu\sin\alpha}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

又 $$\Delta F_z = -K\frac{M\mu r\Delta\theta_i}{r^2+h^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

所以 $$F_z = -\frac{2KMr\mu h}{(r^2+h^2)^{3/2}}\int_0^{\alpha} d\theta = -\frac{2KMr\mu h\alpha}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

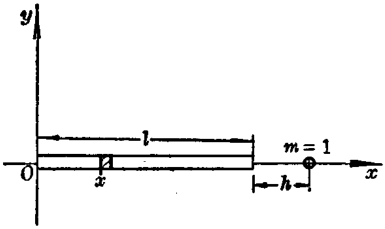
习 题 15-8

1.求均匀质量为 l 的棍，对于放置在距其一端为 h 的单位质点（即 $m = 1$）的吸引力。

提示： $$\Delta F_i \approx K\frac{M_i m}{r^2} = K\frac{\mu\Delta x_i(1)}{[h+(l-x_i)]^2}$$

$$= K\frac{\mu\Delta x_i}{[(h+l)-x_i]^2}$$

答：$K\dfrac{M}{h(h+l)}$，此处$M = \mu l$（棍的质量）。



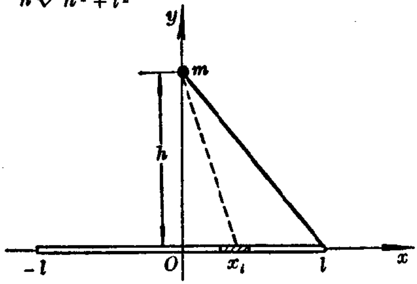
第 1 题

2.求一均匀质量长为$2l$的棍，对于放置在此棍垂直平分线上距棍为 h 处的质点 m 的吸引力。

提示：由于对称　$F_x=0$

$$\Delta F_y \approx K\frac{m\mu\Delta x_i}{h^2+x_i^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{h^2+x_i^2}}$$

答：$K\dfrac{mM}{h\sqrt{h^2+l^2}}$，此处$M=2ul$（棍的质量）。



第 2 题

3.求一均匀质量的圆线，对于放置在垂直于其中心线 h 高处质量为 m 的吸引力。

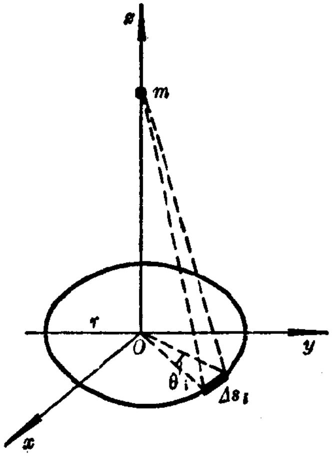
提示：$F_x=0$，$F_y=0$（因对称关系）

$$\Delta F_z \approx K\frac{m\mu\Delta s_i}{r^2+h^2}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$=K\frac{hm\mu r\Delta\theta_i}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

积分时取 θ 由 $0 \sim 2\pi$。

答：$\dfrac{KmMh}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$，此处$M=2\pi r^2\mu$（圆圈的质量）。



第 3 题

4*.在第 1 题中，如果此棍的质量与靠近放置的单位质点的那一端距离成正比，求此棍对于此单位质点的吸引力。

提示： $\Delta F_i \approx K\dfrac{c(l-x_i)\Delta x_i}{[h+(l-x_i)]^2}$，其中 c 为比例常数。

$$= K\frac{c(l-x_i)\Delta x_i}{(h+l-x_i)^2}$$

答：$\dfrac{2KM}{l^2}\left[\ln\dfrac{h+l}{h}-\dfrac{l}{h+l}\right]$。

5*.求本段例 1 中的半圆环，对于放置在点（0，$-a$）处的质点m的吸引力。

提示：由于对称，$F_x=0$

$$\Delta F_y \approx -K\frac{m\Delta M_i}{r_i^2}\cdot\frac{a+OP_i}{r_i}$$

$$= -K\frac{m\mu\Delta s_i}{(a+a\cos\theta_i)^2+a^2\sin^2\theta_i}$$

$$\times\frac{a+a\cos\theta_i}{\sqrt{(a+a\cos\theta_i)^2+a^2\sin^2\theta_i}}$$

$$= -K\frac{m\mu a\Delta\theta_i}{2a^2(1+\cos\theta_i)}\times\frac{a(1+\cos\theta_i)}{\sqrt{2}\,a\sqrt{1+\cos\theta_i}}$$

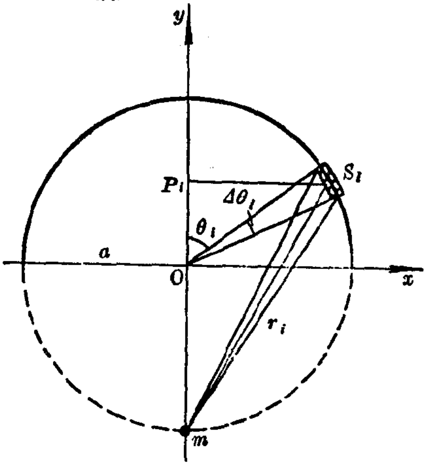
$$= -K\frac{m\mu\Delta\theta_i}{2\sqrt{2}\,a(1+\cos\theta_i)}$$

$$= -K\frac{m\mu\Delta\theta_i}{2a\sin\frac{\theta_i}{2}}$$

$$= -\frac{Km\mu}{2a}\cdot\sec\frac{\theta_i}{2}\Delta\theta_i$$

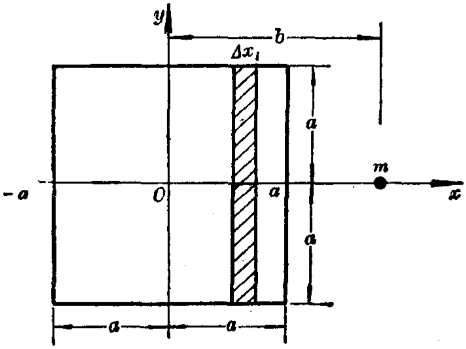
积分 θ 由 0 到$\frac{\pi}{2}$再 2 倍之得。

答： $F_y = -\frac{KmM}{\pi a^2}\ln(1+\sqrt{2})$，此处$M=\mu\pi a$。



第 5 题

6*.有一每边长$2a$的正方形，今有一直线过其中心且平行于两边，在此直线上距中心b处放置一质量为m的质点，求此薄片对质点m的吸引力。



第6题　图

提示：将此薄片平行其它两边（即垂直于该直线）分成窄条成棍形，然后应用第2题的结果。

$$\Delta F_i \approx K\frac{m\Delta M_i}{(b-x_i)\sqrt{a^2+(b-x_i)^2}}$$

$$=K\frac{m\cdot 2a\mu\cdot\Delta x_i}{(b-x_i)\sqrt{a^2+(b-x_i)^2}}$$

积分限由$-a$到a。

答：$\frac{KmM}{2a^2}\ln\left[\left(\frac{b+a}{b-a}\right)\frac{a+\sqrt{a^2+(b-a)^2}}{a+\sqrt{a^2+(b+a)^2}}\right]$。

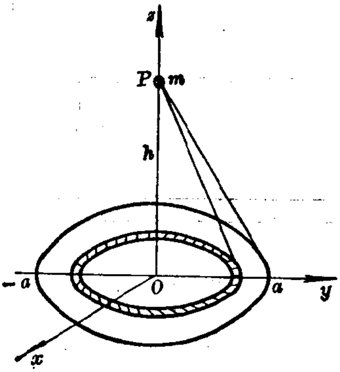
7*.一质点m放于圆盘正中心之上h高处，求圆盘对此质点的吸引力。

提示：考虑把圆盘分成若干同心圆线，然后应用第3题的结果。

$$\Delta F_i \approx \frac{K m \Delta M_i h}{(x_i^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{K m h \mu 2\pi x_i D \Delta x_i}{(x_i^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

此处D为圆盘的厚度。

答：$\dfrac{2KmM}{a^2}\left(1 - \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}\right)$，此处 $M = \pi a^2 \mu D$。



第7题 图

8*.求一圆锥对放置在其顶点处一质量为m的质点的吸引力，设此圆锥的底半径为a，高为h。

提示：先把圆锥分成若干个圆盘，然后应用第7题的结果。

因对称关系，$F_z = 0$，$F_y = 0$。

由相似三角形关系：$\dfrac{x_i}{h} = \dfrac{z_i}{a}$ $\therefore z_i = \dfrac{a}{h}x_i$，由第7题

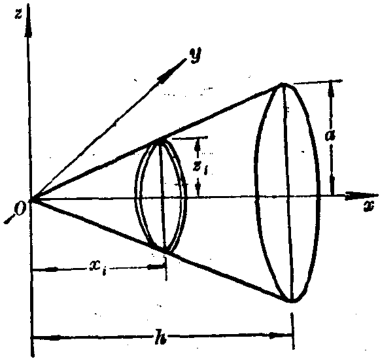
$$\Delta F_x \approx \frac{2Km\Delta M_i}{z_i^2}\left(1 - \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + z_i^2}}\right)$$

$$= \frac{2Km\mu\pi z_i^2 \Delta x_i}{z_i^2}\left(1 - \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + \frac{a^2}{h^2}x_i^2}}\right)$$

$$= 2Km\mu\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\Delta x_i$$

答：$\dfrac{6KmM}{a^2}\left(1-\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$,

此处$M=\dfrac{1}{3}\pi a^2h\mu$。



第 8 题

9*.求一均匀质量的圆柱，其高为 h，半径为 a，质量为M，对于放置于其轴上距底为 l 处的质点m的吸引力。

提示：由于对称$F_x=0$，$F_y=0$，

考虑把圆柱分成若干个圆盘，然后应用第 7 题的结果

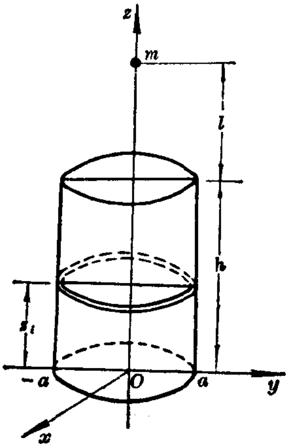
$$\Delta F_z\approx\frac{2Km\Delta M_i}{a^2}\left(1-\frac{l+h-z_i}{\sqrt{a^2+(l+h-z_i)^2}}\right)$$

$$=\frac{2Km\pi a^2\mu}{a^2}\left(1-\frac{l+h-z_i}{\sqrt{a^2+(l+h-z_i)^2}}\right)$$

$$=2Km\pi\mu\left(1-\frac{l+h-z_i}{\sqrt{a^2+(l+h-z_i)^2}}\right)$$

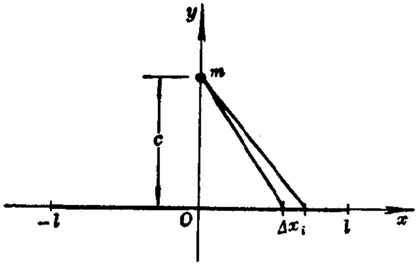
答：$\dfrac{2KmM}{a^2h}\left(h+\sqrt{l^2+a^2}-\sqrt{(l+h)^2+a^2}\right)$,

此处$M=\pi a^2h\mu$。



第 9 题

10*. 一直线长 $2l$，质量为M，其密度与其中心距离成正比，今有一质量m放置于距中心的垂直距离 c 处，试求其吸引力。



第10题

提示：按题意 $\mu=\lambda x_i$（λ 为比例常数）

$$\therefore\quad M=2\int_0^l \mu dx=2\int_0^l \lambda x dx=\lambda x^2\Big|_0^l=\lambda l^2$$

分此直线上部为小段，于是在 y 轴方向上的分力

$$\Delta F_y \approx 2 \cdot \frac{Km\Delta M_i}{x_i^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{x_i^2 + c^2}}$$

$$= \frac{2cKm\mu_i \Delta x_i}{\sqrt{x_i^2 + c^2}}$$

$$= \frac{2cKm\lambda x_i \Delta x_i}{(x_i^2 + c^2)^{3/2}}$$

答：$\frac{2KcmM}{l^2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + l^2}}\right)$。

总　结

在这一章中，我们看出，从函数和的极限出发对于几何上、物理上、工程上展开了一系列的广泛应用。同时也是锻炼读者如何把一些几何、物理、工程上的问题化为数学处理的初步偿试，为下一步学习重积分、微分方程打下基础。本章留有大量习题，供读者练习。

本章主要讲定积分在两方面的应用

（一）定积分在几何上的应用

（1）面积

①直角坐标情形：$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$ 或 $A = \int_c^d (x_1 - x_2) \times dy$。

②极坐标情形：$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$。

（2）体积

①旋转体：$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$，$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$。

②切片法：$V=\int_a^b A(x)dx$，$A(x)$为截面积。

③剥壳法：$V_y=2\pi\int_a^b xh(x)dx$，

$$V_x=2\pi\int_c^d yk(y)dy。$$

（3）弧长

①$y=f(x)$：　$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

③$\rho=\rho(\theta)$：　$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

（4）旋转面

①$y=f(x)$：$S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$$S_y=2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

②$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$：

$$S_x=2\pi\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

$$S_y=2\pi\int_{t_3}^{t_4}\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

③$\rho=\rho(\theta)$： $S_x=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$

$$S_y=2\pi\int_{\gamma}^{\delta}\rho\cos\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$$

（二）定积分在物理上的应用

（1）变力$F=f(x)$所作的功

$$W=\int_a^b f(x)dx$$

（2）平均值

①算术平均值：$\bar{y}_n=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$

②函数平均值：$\bar{y}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}$

实际上积分中值定理

$$f(\xi)=\bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$是它的极限形式。

（3）重心

重心坐标问题即是物体内质点与坐标轴的距离的平均值。

$$\bar{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

这个公式可以具体的应用到薄片上、立体上，而其积分公式也略有不同。

①薄片：$x_c=\dfrac{\int_a^b \mu xy dx}{M}$（非均匀），（重心）

$$=\frac{\int_a^b xy dx}{A}\text{（均匀），（形心）}$$

$$y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b \mu y^2 dx}{M}\text{（非均匀），（重心）}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{A}\text{（均匀），（形心）}$$

②旋转体：

$$x_c=\frac{\int_a^b \mu xy^2 dx}{\int_a^b \mu y^2 dx}=\frac{\int_a^b \mu xy^2 dx}{M}\text{（非均匀），（重心）}$$

$$=\frac{\int_a^b xy^2 dx}{V}\text{（均匀），（形心）}$$

$$y_c=0,\quad \bar{z}_c=0$$

③旋转面：

$$x_c=\frac{2\pi\int_a^b xy\mu\sqrt{1+y'^2}\,dx}{M}\text{（非均匀），（重心）}$$

$$=\frac{2\pi\int_a^b xy\sqrt{1+y'^2}\,dx}{S}\text{（均匀），（形心）}$$

④物质曲线：

$$x_c=\frac{\int_0^l \mu x ds}{M}\text{（非均匀），（重心）}$$

$$=\frac{\int_0^l x ds}{l}\text{（均匀）．（形心）}$$

$$y_c=\frac{\int_0^l \mu y ds}{M}\text{（非均匀），（重心）}$$

$$=\frac{\int_0^l y ds}{l}\text{（均匀），（形心）}$$

（4）液体压力

物体在液面下所受压力等于其上面液柱体积之重。

物体在液体中所受之压力各个方向是相等的。

压力＝压强×板面面积

压强　$P=\gamma h$（吨/平方米）

压力　$F=\gamma\int_a^h xu(x)dx$

其中γ表示液体比重，当液体为水时，$\gamma=1$。

（5）转动惯量

一质点若质量为m，距转轴为r，则其转动惯量为mr^2。

转动惯量有可加性，设质点系的转动惯量为I，则

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$$

①棍绕其一端的转动惯量为：$\frac{1}{3}Ml^2$，$M=\mu l$。

②棍绕其中心的转动惯量为：$\frac{1}{3}Ma^2$，$M=2a\mu$。

③圆盘绕其中心转动的转动惯量为：$\frac{1}{2}Mr^2$，

$$M=\pi r^2\mu。$$

④圆盘绕其一直径转动的转动惯量为：

$$\frac{1}{4}Ma^2,\quad M=\pi a^2\mu。$$

⑤圆球绕其一直径转动的转动惯量为：

$$\frac{2}{5}Mr^2,\quad M=\frac{4}{3}\pi r^3\mu。$$

（6）吸引力

在计算吸引力时主要用的是牛顿万有引力

$$F=K\frac{mM}{r^2}$$

这个公式告诉我们引力与两物体的质量成正比，与其距离平方成反比，而公式中的K为比例常数。

关于上面讨论的一系列问题中，主要矛盾是一个均匀与非均匀的问题，对于均匀问题可以简单的用乘法解决例如：

矩形面积＝长×宽

常力作功＝力×距离

但对求曲边梯形面积问题，变力作功问题就不能用简单的乘所能解决。为此就得把它们分成小份，然后用小矩形，用常力作功的方法来近似，无限分细，无限积累成为定积分的问题，

其它如体积、重心、压力、引力等均是用这一方法处理的。

第五次测验作业

（可以按专业不同要求选5-6题）

0-组

1.求由曲线$y=x^2-2x-3$，$y=6x-x^2-3$所围成的面积。

2.求将抛物线$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$与两轴所围的面积绕$x$轴旋转所成的体积。

3.求曲线$y^3=x^2$上由（0，0）点到（8，4）点一段的弧长。

4.弹性体所受压缩之力F与缩短距离x之间关系按虎克定律$F=kx$计算，今有弹簧一个，原长为一米，每压缩一厘米需力5克，若自80厘米缩至60厘米，问作功若干?

5.求由抛物线$y^2=2px$与直线$y=mx$所围面积的形心。

6.水闸的门为矩形，宽20米，高16米，铅直立于水中，若它上边与水面相齐，求水作用在闸门上的压力。

7.计算广义积分

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

1-组

1.求曲线$\rho=3\cos\theta$，$\rho=1+\cos\theta$的公共面积。

2.求$y=x^3$，$y=0$，$x=2$所围面积绕y轴旋转体体积。

3.求曲线$y^2=x^3$在$x=0$，与$x=\frac{5}{9}$间的弧长。

4.若加20千克之力于一钢线上，线则伸长一厘米，问此力所作之功若干?

5．求由二抛物线$y^2=ax$与$x^2=by$所围面积的形心。

6．一水平油池的两端均成一椭圆形，此椭圆的水平轴长为12英尺，而垂直轴长为 6 英尺，如此池盛油半满，而每立方英尺油重为60磅，试计算其一端所受之压力。

7．计算广义积分$\int_{-\infty}^{-3}\frac{xdx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$之值。

2-组

1．计算由曲线$y=\frac{1}{1+x^2}$与$y=\frac{x^2}{2}$所围成的面积。

2．求由曲线$y=\sin x$，x轴，$x=\pi$所围面积绕x轴所成的体积。

3．求曲线$\begin{cases}x=e^\theta\sin\theta\\y=e^\theta\cos\theta\end{cases}$由$\theta=0$，到$\theta=\frac{\pi}{2}$一段弧长。

4．半径等于r米的半球形水池，其中充满了水，把池内的水完全吸尽，需作功多少？

5．求由曲线$y^2=a^2-ax$，$x=0$，$y=0$在第一象限所围面积的形心。

6．一水槽直立的一端为一等腰三角形，每腰长 8 米，当水槽盛满水后，试计算一端所受的压力。

7．试计算$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$之值。

3-组

1．求$\rho=\sqrt{2}\sin\theta$，$\rho^2=\cos2\theta$的公共面积。

2．求由$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$，$x=0$，$x=a$，$y=0$所围面积绕$x$轴所成的旋转体体积。

3．求$y^2=2px$自点（0，0）至点$\left(\frac{p}{2},\ p\right)$的弧长。

4. 物体按规律$x=ct^3$作直线运动，式中x为时间t内所通过的距离，媒质的阻力正比于速度的平方，试求物体由$x=0$至$x=a$点时阻力所作的功。

5. 求$y=x^3-3x$，$y=x$所围面积（第一象限）的形心。

6. 水坝中有一直立的矩形闸门，阔10米，深6米，闸门的上边平行于水面，试求：ⓐ水面在闸门顶上8米时闸门所受之压力；ⓑ如欲使所受之压力加倍，则水面应升高若干？

7. 求广义积分$\int_0^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$之值。

4-组

1. 求 $3p=\sqrt{6}\sin 2\theta$，$\rho^2=\cos 2\theta$的公共面积。

2. 求由曲线$x^2=4y-2y^2$，$x=0$所围的面积绕y轴旋转所得的旋转体体积。

3. 求曲线$x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$自$t=0$至$t=\pi$的一段弧长。

4. 有锥形贮水池，深15米，口径20米，盛满水，今用唧筒将水吸尽，问需作功若干？

5. 求$x^2-y^2=a^2$，$x=2a$所围面积绕x轴旋转所成之旋转体的形心。

6. 闸门的形状为等腰梯形，铅直立于水中闸门的二水平边的长分别为200米和50米，而高等于10米，若较长的上底与水的自由表面相齐，试计算水对闸门压力大小。

7. 求广义积分$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$的值。

5-组

1. 求$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，$x+y=1$所围的面积。

2.有一立体，以长半轴$a=10$，短半轴$b=5$的椭圆为底面，且垂直于长轴的截面积都是等边三角形，试求其体积。

3.抛物线$\rho=\dfrac{m}{1-\cos\theta}$，从$\theta=\pi$到$\theta=\phi$的一段弧长。

4.有一水桶形如圆锥台，盛满了水，如果桶高为3米，其上下底的半径分别为1米及2米，试计算将桶中水吸尽所耗费的功。

5.求曲线$y=x^3$，x轴，$x=1$所围的面积绕x轴所成的旋转体的形心。

6.一底为8厘米，高为6厘米的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上，底在下，且与水面平行，而顶离水面3厘米，试求它每面所受的压力。

7.求广义积分$\int_0^{\infty}e^{-x}\sin x dx$之值。

6-组

1.求抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2$分割圆$x^2+y^2\leqslant 8$成两部分，分别求这两部分的面积。

2.有一立体的抛物线$y^2=2x$与直线$x=2$所围成的图形为底，而垂直于抛物线轴的截面都是等边三角形，求其面积。

3.曲线$\rho\theta=1$，自$\theta=\dfrac{3}{4}$至$\theta=\dfrac{4}{3}$的一段弧长。

4.两带电小球，中心相距为r，各带电荷Q_1与Q_2，其相互推拒之力可由库伦定律$F=K\dfrac{Q_1Q_2}{r^2}$（K为常数）计算。设当$r=50$厘米时，$F=20$克重，今两球之距离自$r=75$厘米变为$r=100$厘米，求所作之功。

5.求由曲线$y=x^3$，x轴，$x=1$所围之面积，绕x轴旋转体的形心。

6.一梯形闸门，上底长12米与水面相齐，下底8米没于水下，梯形高4米，求水对此闸门的压力。

7.求广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$之值。

7-组

1.求心形线$x=a(2\cos t-\cos 2t)$，$y=a(2\sin t-\sin 2t)$的面积。

2.求由曲线$y=6-x$，$y=0$，$x=4$所围成的面积绕x轴旋转所成的体积。

3.求曲线$x=\operatorname{arctg}t$，$y=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$自$t=0$至$t=1$一段的弧长。

4.按万有引力定律,两质点间的吸引力为$F=K\frac{m_1m_2}{r^2}$，K为常数，m_1，m_2为两质点的质量，r为其间的距离，若两质点m_1，m_2起始之距离为a，质点m_1沿直线移动至离m_2为b之处试求所作之功（$b>a$）。

5.求抛物线$y=ax^2$与$x=a$所成的抛物线截头的形心。

6.一水闸门成抛物线截头形，其上面横截线宽200米,高25米，垂直立着,问当水升到20米深时,闸门所受压力如何?

7.求广义积分$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$之值。

8-组

1.求$x=a\cos^3t$，$y=a\sin^3t$所围成的图形的面积。

2.由半立方抛物线$ay^2=x^3$，y轴，$y=a$所围的面积绕

x 轴旋转所成的体积。

3.求心形曲线$\rho=a(1-\sin\theta)$的弧长。

4.一圆锥形水槽，上口直径为20米，高为15米，如果水面距顶口 5 米，问将水泵满需作功多少？

5.求由抛物线$y^2=2px$，y 轴，$y=b$所围面积的 形心。

6.每边为 8 米的正方薄板，铅直沉入水中，其一角与水面齐，其一对角线与水面平行，求其所受水压力为多少？

7.求广义积分$\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$之值。

9-组

1.求由二曲线$\rho=\sqrt{2}\cos\theta$，$\rho^2=\sqrt{3}\sin 2\theta$ 所 围 的公共面积。

2.求由二曲线$y^3=27x$，$3x=4y-y^2$在第一象限所 围面积绕 y 轴旋转所成的体积。

3.求曲线 $y=\ln\sec x$ 由原点到$\left(\frac{\pi}{3},\ln 2\right)$上一段的弧长。

4.一水箱为正圆柱形，直径为16米，高 20 米，欲 压 满水，问需作功多少？（每立方米水重1000公斤）

5.求由曲线$ay^2=x^2$，$x=a$ 所围面积绕 x 轴旋转所成的旋转体体积的形心。

6.一圆柱油桶，平卧地上，其直径为 8 英尺半盛以油（每立方英尺油重60磅）问其一端所受压力如何？

7.求广义积分$\int_1^5\frac{xdx}{\sqrt{5-x}}$之值。

积 分 简 表

Ⅰ．基本积分表

表（一）

1． $\int 0dx = C$

2． $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3． $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4． $\int \cos x dx = \sin x + C$

5． $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6． $\int \sec^2 x dx = \mathrm{tg} x + C$

7． $\int \csc^2 x dx = -\mathrm{ctg} x + C$

8． $\int \sec x \,\mathrm{tg} x dx = \sec x + C$

9． $\int \csc x \,\mathrm{ctg} x dx = -\csc x + C$

10． $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

11． $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

$$= -\arccos \frac{x}{a} + C$$

12． $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$

$$=-\frac{1}{a}\text{arcctg}\frac{x}{a}+C$$

13. $\int \sinh x dx=\cosh x+C$

14. $\int \cosh x dx=\sinh x+C$

表（二）

15. $\int \text{tg}x dx=-\ln|\cos x|+C$

16. $\int \text{ctg}x dx=\ln|\sin x|+C$

17. $\int \sec x dx=\ln|\sec x+\text{tg}x|+C$

18. $\int \csc x dx=\ln|\csc x-\text{ctg}x|+C$

19. $\int \sin^2 x dx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x)+C$

20. $\int \cos^2 x dx=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C$

21. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C,\quad x^2<a^2$

$$=\frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a}+C,\quad x^2>a^2$$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$

23. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{a^2-x^2}$

$$+a^2\arcsin\frac{x}{a}\Big]+C$$

24. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2\pm a^2}$

$$\pm a^2 \ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})] + C$$

Ⅱ. 代数有理函数

（A）含有$a+bx$的积分

25. $$\int (a+bx)^m dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C(m \neq -1)$$

26. $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C$$

27. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C$$

28. $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b(a+bx)^2} + C$$

29. $$\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|) + C$$

30. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right] + C$$

31. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C$$

32. $$\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$$

33. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln|a+bx| - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C$$

34. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$$

35. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$$

36. $\int x(a+bx)^m dx = \frac{1}{b^2}\int y^m(y-a)dy$,

此处$y \equiv a+bx$

37. $\int x^n(a+bx)^m dx = \frac{1}{b^{n+1}}\int y^m(y-a)^n dy$,

y同上

38. $\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^{n+1}}\int \frac{(y-a)^n}{y^m}dy$，$y$同上

39. $\int \frac{dx}{x^n(a+bx)^m}$

$$= -\frac{1}{a^{m+n-1}}\int \frac{(z-b)^{m+n-2}dz}{z^m},$$

此处 $z \equiv \frac{a+bx}{x}$

(B) 含有$\sqrt{a+bx}$的积分

40. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C$.

41. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx$

$$= -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C$$

42. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx$

$$= \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C$$

43. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C$

44. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}$

$$+C$$

45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+C\ (a>0)$

$=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C\ (a<0)$

46. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

47. $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$

(C) 含有$a\pm bx^2$的积分

48. $\int \frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}x+C$

$(a>0,\ b>0)$

49. $\int \frac{dx}{a-bx^2}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}x}\right|+C\quad(a>0,\ b>0)$

50. $\int \frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln|a+bx^2|+C$

51. $\int \frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}$

52. $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{|a+bx^2|}+C$

53. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$

54. $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{a+bx^2}$$

55. $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma} \cdot \frac{x}{(a+bx^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}$$

56. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{-x}{2mb(a+bx^2)^m} + \frac{1}{2mb}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^m}$$

57. $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{m+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^m} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{m+1}}$$

（D）含有$\sqrt{x^2+a^2}$的积分

58. $$\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

59. $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C$$

60. $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

61. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$

62. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}$

$$-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$$

63. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

64. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C$

65. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$

66. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} + C$$

67. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} + C$

68. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

（E）含有$\sqrt{x^2-a^2}$的积分

69. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$

70. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C$

71. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx$

$$=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}$$

$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

72. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C$

73. $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5}+C$

74. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}$

$$+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

75. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

76. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec\frac{x}{a}+C'$

$$=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C$$

77. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$

78. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}+C$

$$=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\text{arc sec}\frac{x}{a}+C'$$

79. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}+C'$$

80. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx$

$$=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

（F）含有$\sqrt{a^2-x^2}$的积分

81. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

82. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C$

83. $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$

84. $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

85. $\displaystyle\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx$

$$=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

86. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}+C$

87. $\displaystyle\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}+C$

88. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

89. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$

90. $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C'$$

91. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$

92. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C'$$

93. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$

$$=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$$

94. $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$$

（G）含有$\sqrt{2ax\mp x^2}$的积分

95. $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx$

$$=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x-a}{a}+C$$

96. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$$

$$=\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+C'$$

97. $$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{-x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}{n}$$

$$+\frac{a(2n-1)}{n}\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

98. $$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a(1-2n)x^n}+\frac{n-1}{(2n-1)a}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}$$

99. $$\int x^n\sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

$$=\frac{-x^{n-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2}+\frac{(2n+1)a}{n+2}$$

$$\times\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

100. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^n}dx$$

$$=\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(3-2n)ax^n}+\frac{n-2}{(2n-3)a}$$

$$\times\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^{n-1}}dx+C$$

101. $$\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}+C$$

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \ln|x+a+\sqrt{2ax+x^2}| + C$

（H）含有$a+bx\pm cx^2$（$c>0$）的积分

103. $\int \frac{dx}{a+bx-cx^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}\right| + C$$

104. $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2<4ac) \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left|\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C & (b^2>4ac) \end{cases}$$

（I）含有$\sqrt{a+bx\pm cx^2}$　（$c>0$）的积分

105. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \ln|2cx+b+2\sqrt{C}\sqrt{a+bx+cx^2}| + C$$

106. $\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx$

$$= \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln|2cx+b$$

$$+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}| + C$$

107. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

$$= \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln|2cx+b$$

$$+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}| + C$$

108. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

109. $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}$

$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

110. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}$

$+\frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C$

（ J ）含有$\sqrt{\frac{a\pm x}{b\pm x}}$、$\sqrt{(x-a)(x-b)}$ 的积分

111. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a+x)(b+x)}$

$+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}) + C$

112. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)}$

$+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C$

113. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)}$

$-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C$

114. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$

115. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$

Ⅲ. 超越函数

（ A ）含有三角函数的积分

116. $\int \sin^n x dx$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

117. $\int \cos^n x dx$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

118. $\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x dx$

119. $\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\frac{\mathrm{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{ctg}^{n-2} x dx$

120. $\int \sec^n x dx$

$$= \frac{\mathrm{tg}\, x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx$$

121. $\int \csc^n x dx$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}\, x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x dx$$

122. $\int \sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

123. $\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

124. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}$

$$\times \int \cos^{m-2} x \sin^n x dx \quad (m \neq -n)$$

$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n}$$

$$+\frac{n-1}{m+n}\int\cos^m x\sin^{n-2}x dx \quad (m\neq -n)$$

$$=-\frac{\sin^{n+1}x\cos^{m+1}x}{m+1}+\frac{m+n+2}{m+1}$$

$$\int\cos^{m+2}x\sin^n x dx \quad (m\neq -1)$$

$$=\frac{\sin^{n+1}x\cos^{m+1}x}{n+1}+\frac{m+n+2}{n+1}$$

$$\int\cos^m x\sin^{n+2}x dx \quad (n\neq -1)$$

125. $$\int\sin ax\sin bx dx=\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}$$

$$-\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}+C \quad (a\neq b)$$

126. $$\int\cos ax\cos bx dx=\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}$$

$$+\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}+C \quad (a\neq b)$$

127. $$\int\sin ax\cos bx dx=-\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)}$$

$$-\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}+C \quad (a\neq b)$$

128. $$\int x^n\sin x dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x dx$$

129. $$\int x^n\cos x dx=x^n\sin x-n\int x^{n-1}\sin x dx$$

130. $$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{a+b}$$

$+C$，当$a^2-b^2>0$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a+b+\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{a+b-\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$$

$+C$，当$b^2-a^2>0$

131. $$\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

$+C$，当$a^2>b^2$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right|$$

$+C$，当$a^2<b^2$

132. $$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b\operatorname{tg}x}{a}\right)+C$$

133. $$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x-b^2\sin^2x}=\frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\operatorname{tg}x+a}{b\operatorname{tg}x-a}\right|+C$$

（*B*）含有反三角函数的积分

134. $$\int\arcsin\frac{x}{a}dx=x\arcsin\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C$$

135. $$\int x\arcsin\frac{x}{a}dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

136. $$\int x^2\arcsin\frac{x}{a}dx=\frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$$

137. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}\, x}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a}$

$-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

138. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$

139. $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a}$

$-\frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C$

140. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a}$

$-\frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C$

141. $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a}$

$+\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

142. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$

143. $\int x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C$

144. $\int x^2\operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6}$

$+\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C$

145. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

$-\frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}+C$

146. $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$

147. $\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}$

$+\frac{ax}{2}+C$

148. $\int x^2\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+\frac{ax^2}{6}$

$-\frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2)+C$

149. $\int \frac{\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}\,dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$

$+\frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2}+C$

150. $\int \operatorname{arc\,sec}x\,dx = x\operatorname{arcsec}x - \ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$

151. $\int \operatorname{arc\,csc}x\,dx = x\operatorname{arc\,csc}x + \ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$

152. $\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2x$

$+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$

153. $\int \arccos^2 x\,dx = x\arccos^2 x - 2x$

$-2\sqrt{1-x^2}\arccos x + C$

154. $\int x^n \arcsin x\,dx = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arcsin x\right.$

$\left.-\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad (n \neq -1)$

155. $$\int x^n \arccos x dx=\frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arccos x + \int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)(n\neq-1)$$

156. $$\int x^n \mathrm{arctg} x dx=\frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\mathrm{arctg} x - \int\frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx\right)(n\neq-1)$$

157. $$\int x^n \mathrm{arc\ ctg} x dx=\frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\mathrm{arc\ ctg} x + \int\frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx\right)(n\neq-1)$$

（C）其他

158. $$\int \sin(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$$

159. $$\int \cos(\ln x)dx=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$$

160. $$\int x^n e^{ax}dx=\frac{x^n e^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$$

161. $$\int x^n \ln x dx=x^{n+1}\left[\frac{\ln x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]+C \quad (n\neq-1)$$

162. $$\int x^n \ln^m x dx=\frac{x^{n+1}\ln^m x}{n+1}-\frac{m}{n+1}\times\int x^n\ln^{m-1}x dx \quad (n\neq-1)$$

163. $$\int e^{ax}\sin nx dx=\frac{e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C$$

164. $$\int e^{ax}\cos nx dx=\frac{e^{ax}(n\sin nx+a\cos nx)}{a^2+n^2}+C$$

165. $\int x^n a^{mx} dx = \frac{a^{mx} x^n}{m\ln a} - \frac{n}{m\ln a} \int x^{n-1} a^{mx} dx$

166. $\int e^{ax} \sin^n x dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + x^2}(a\sin x - n\cos x)$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} x dx$

167. $\int e^{ax} \cos^n x dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + x^2}(a\cos x + n\sin x)$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} x dx$

168. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C$

169. $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx$

170. $\int \sinh^2 x dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + C$

171. $\int \cosh^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sinh 2x + C$

172. $\int x^m (a+bx^n)^p dx$

$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{(m-n+1)a}{b(np+m+1)}$

$\times \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$

$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{npa}{np+m+1}$

$\times \int x^m (a+bx^n)^{p-1} dx$

$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)}$

$$-\frac{b(np+n+m+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx$$

$$=\frac{-x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na(p+1)}$$

$$+\frac{np+n+m+1}{na(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx$$

Ⅳ.定积分

173. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx$

174. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0$

175. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos n\pi dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$

176. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$

177. $\int_{0}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx dx$

$$=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\end{cases}$$

178. $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\begin{cases} I_n=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}\times 1 \\ \quad (n\text{为奇数}),\ I_1=1 \\ I_n=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} \\ \quad (n\text{为偶数}),\ I_0=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

179. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}x\cos^n x dx$

$$=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots 2n}{(n+1)(n+3)\cdots\cdots(n+2m+1)}$$

180. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x\cos^{2n}x dx$

$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2m+2n)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

181. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^{2n+1}x dx$

$$=\frac{2\cdot 4\cdot 6、\cdots\cdots、2n}{(m+1)(m+3)\cdots\cdots(m+2n-1)(m+2n+1)}$$